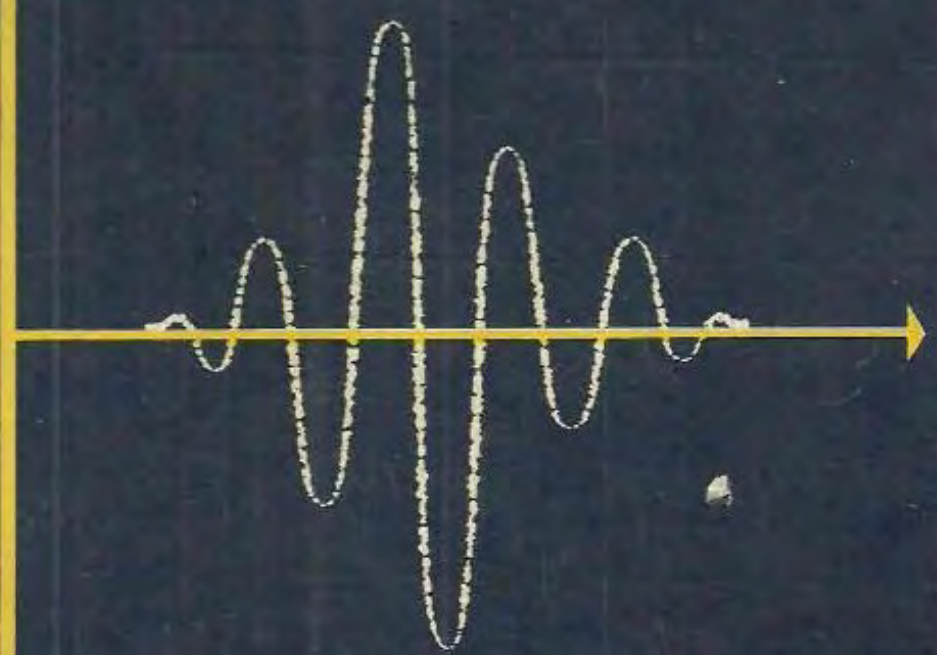
MIRCEA ALEXANDRU ONCESCU

FIZICA



nivel postliceal volumul 1

Sistemul Internaţional de unităţi

Mărimea	Unitatea	Alegerea unităţii
	UNITĂŢILE FUNDAMENTALE:	
Lungimea	metru m	Lungimea unei bare etalon
Masa	kilogram kg	Masa unui corp etalon
Timpul	secunda s	Durata unui fenomen periodic natural
Curentul electric	Amper A	Curentul produs prin trecerea unui anumit număr de electroni (printr-un conductor) într-o secundă
Temperatura	Kelvin K	A suta parte din intervalul de temperatură între punctul de topire a gheţii şi punctul de fierbere a apei, la presiunea atmosferică normală
Intensitatea luminoasă	candela cd	Intensitatea luminoasă a unui corp incandescent, convenţional ales, la temperatura sa de topire
	UNITĂŢILE SUPLIMENTARE:	
Unghiul plan	radian rad	Unghiul plan ales convenţional
Unghiul solid	sterardian sr	Unghiul solid ales convenţional

Definiţiile metrologice sînt date în Anexa 3.

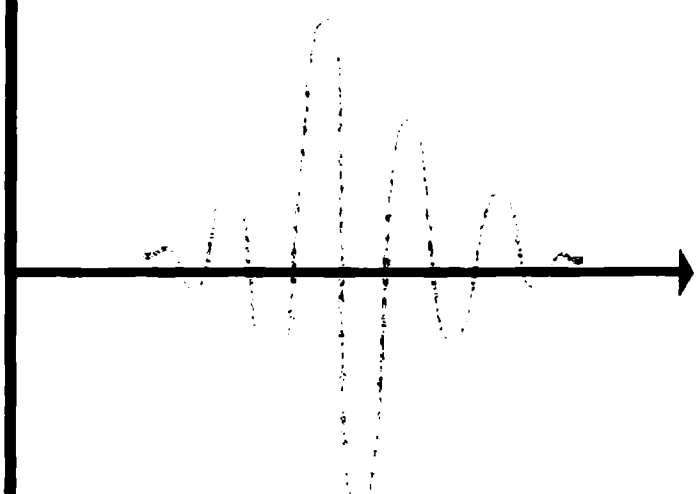
COPERTA ANTERIOARĂ: Procesul oscilatoriu limitat în timp cu durata Θ...

COPERTA POSTERIOARĂ: ... este compus, conform teoremei Fourier, dintr-un număr foarte mare de procese oscilatorii armonice ale căror frecvenţe ocupă domeniul $\Delta\nu$ (§ 13.3)

Mărimea	Unitatea	Simbolul
	UNITĂŢILE DERIVATE:	
Arie	metru pătrat	m^2
Volum	metru cub	m^3
Viteză	metru pe secundă	m/s
Viteză unghiulară	radian pe secundă	rad/s
Acceleraţie	metru pe secundă la pătrat	m/s^2
Acceleraţie unghiulară	radian pe secundă la pătrat	rad/s^2
Frecvenţă	hertz	Hz
Densitate (masă volumică)	kilogram pe metru cub	kg/m^3
Forţă	newton	N
Presiune	newton pe metru pătrat	N/m^2
Vîscozitate dinamică (Vîscozitate)	newton secundă pe metru pătrat	$N.s/m^2$
Vîscozitate cinematică	metru pătrat pe secundă	m^2/s
Lucru mecanic, energie,	joule	J
Putere	watt	W
Sarcină electrică,	coulomb	C
Tensiune electrică,	volt	V
Intensitatea cîmpului electric	volt pe metru	V/m
Rezistenţa electrică	ohm	Ω
Capacitate electrică	Farad	F
Flux de inducţie magnetică	weber	Wb
Inducţie magnetică	weber pe metru pătrat	Wb/m^2
Intensitatea cîmpului magnetic	amper pe metru	A/m
Inductanţă	henry	H
Tensiune magnetomotoare	amper	A
Flux luminos	lumen	lm
Luminanţă	candelă pe metru pătrat	cd/m^2
Iluminare	lux	lx

MIRCEA ALEX. ONCESCU

FIZICA



nivel postliceal volumul 1

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ — BUCUREŞTI, 1973

Referenți : Doctor docent **Aretin Corciovei**
Cercetător **Aurelia Țopa**
Profesor **Ludovic Schwartz**

Coperta și desene : Arhitect **Constantin Ghițulescu**
Arhitect **Irena Ghițulescu**

Prefață

Fizica modernă a adăugat la fizica clasică un număr foarte mare de cunoștințe, care au revoluționat concepțiile vechi despre lumea înconjurătoare și care au împins frontierele fizicii mult în domeniul necunoscutului. În acest progres, nemaiîntîlnit în altă disciplină științifică, *abstractizarea* și *matematizarea* au fost și sînt folosite din ce în ce mai mult ca „instrumente de lucru", care au ușurat munca cercetătorului și care au permis pătrunderea în domenii greu accesibile sau chiar inaccesibile pînă atunci: nucleul și particulele elementare, sau stelele și galaxiile. În același timp însă, abstractizarea și matematizarea au transformat fizica într-o disciplină din ce în ce mai greu de însușit și de aceea asimilarea fizicii a devenit și mai dificilă pentru cei ce au nevoie de cunoștințele de fizică doar pentru a le aplica în diversele ramuri ale științei și tehnicii.

Pentru motivele arătate *predarea fizicii* este o problemă acută în procesul de învățămînt, mai ales dacă se ține seama și de faptul că prezentarea fizicii trebuie să fie continuu adaptată la ritmul actual de dezvoltare al acestei discipline.

În predarea cunoștințelor de fizică, la orice nivel al procesului de învățămînt, există riscul ca transmiterea acestor cunoștințe să nu se facă în mod eficient. Aceasta se poate datora fie faptului că se folosește prea mult abstractizarea raționamentelor, fie că se simplifică prea mult raționamentele în detrimentul rigurozității. De aceea în predarea fizicii la anumite nivele trebuie realizat un echilibru, prin folosirea abstractizării, numai atît cît este nevoie pentru explicarea unor concepte mai dificil de abordat și prin folosirea raționamentelor simplificate, numai în măsura în care acestea nu știrbesc rigurozitatea demonstrațiilor.

O prezentare a fizicii ar trebui făcută astfel încît să nu se lase impresia, evident greșită, că în fizică s-a descoperit totul ci să se arate că frontierele acestei discipline sînt în continuă mișcare, iar legile fenomenelor reprezintă anumite aproximații. Pentru fenomenele care astăzi nu sînt explicate se vor adăuga noi informații, care vor îmbunătăți aproximația cu care descriem natura.

De asemenea, în prezentarea fizicii trebuie combătută concepţia că natura este simplă şi că însuşirea fenomenelor din natură se poate face după un şablon unic. Mai mult chiar, în predarea fizicii ar trebui să se creeze, printr-un proces sistematic şi continuu, acele „forme de gîndire" şi aptitudinile care să permită celor ce studiază fizica înţelegerea fenomenelor complexe ale lumii înconjurătoare, cum ar fi, de exemplu, relativitatea, comportarea statistică, comportarea cuantică etc.

*

* *

Cartea de faţă încearcă o prezentare a fizicii la *nivelul postliceal.* În diferitele ţări există diferenţe între volumul cunoştinţelor acestui nivel de studiu, dar în toată lumea există părerea unanimă că pentru pregătirea celor care îşi vor aduce aportul lor la ştiinţa şi tehnica modernă, *nivelul postliceal în însuşirea fizicii are un rol primordial.*

De aceea cred că prezentarea fizicii la nivelul postliceal nu trebuie să se bazeze pe repetarea cunoştinţelor, predate anterior, ci trebuie să presupună însuşite cunoştinţele fundamentale proprii fizicii de liceu.

Totuşi sistematizarea anumitor cunoştinţe foarte importante, predate anterior, sau „justificarea" prin alte mijloace a unor legi deja cunoscute sînt binevenite. În predarea cunoştinţelor la acest nivel nu este necesar să se reia toate capitolele fizicii studiate în liceu. Scopul nivelului postliceal în predarea fizicii este dublu:

1. să asigure acelora care au nevoie de fizică ca un instrument auxiliar în alte domenii ale ştiinţei şi tehnicii, cunoştinţe mai largi şi tratate la un nivel superior celui din liceu şi
2. să pregătească gîndirea fizică pentru însuşirea cunoştinţelor de nivel superior, acelora care vor studia fizica în continuare.

*

* *

Către cititorii care predau fizica

În fizică mai mult decît în orice altă disciplină, există numeroase *moduri de predare* mai ales la nivelul postliceal. Aceasta rezultă din numărul relativ mare de cărţi de fizică de acest nivel existente în literatura mondială şi care au fiecare un mod particular de tratare.

Cartea de faţă prezintă modul de tratare şi de predare folosit de autor în învăţămîntul superior tehnic. Materialul acestei cărţi poate fi însă folosit şi de către profesorii de liceu la cercurile de fizică. Cunoştinţele de algebră vectorială care nu au fost predate în liceu dar care sînt necesare pentru înţelegerea cîtorva capitole sînt grupate într-o anexă.

Sînt de părere că predării moderne a fizicii îi este specific un mod propriu de prezentare a fenomenelor din natură şi anume: „extragerea" legilor din faptele experimentale şi apoi deducerea din legi, a teoremelor, cu ajutorul matematicii. Din lecţiile de fizică trebuie să rezulte cu claritate *sistemul de legi* pe care se bazează explicarea fenomenelor fizice într-o anumită etapă de studiu.

În predarea fizicii matematica trebuie folosită ca un *instrument de lucru* şi nu ca un scop în sine. Trebuie combătută tendinţa, extrem de periculoasă,

de a reduce lecţiile de fizică, pentru acest nivel, la lecţii de demonstraţii matematice. Această tendinţă este un refugiu comod al celui ce predă fizica şi are ca efect îndepărtarea auditoriului său de înţelegerea fenomenelor fizice.

* * *

Către cititorii care învaţă fizica

Însuşirea fizicii înseamnă formarea unui *sistem de gîndire* care să permită înţelegerea fenomenelor naturii. Concepţia că natura este simplă este o concepţie falsă, care nu numai că împiedică însuşirea cunoştinţelor noi, dar ea deformează înţelegerea fenomenelor din natură şi în special a acelor aspecte mai complexe ale naturii, pe care fizica a ajuns să le elucideze în ultimul timp.

Dificultatea însuşirii fizicii constă în numărul mare de legi care trebuie învăţate ca atare. Legile fizicii se învaţă pe baza „extragerii" lor din faptele experimentale şi nu prin deducerea matematică a lor.

La prima citire a lucrării de faţă se pot lăsa de o parte paragrafele sau capitolele care prezintă dificultăţi la înţelegerea lor, de exemplu §§ 5.7, 6.5, 7.6, 8.7, 10.6, 10.7, 12.6, 13.3 ş.a. Unele părţi mai dificile trebuie citite de mai multe ori pentru a fi înţelese. Să nu uităm că înţelegerea unor fenomene sau a unor raţionamente nu se poate obţine dintr-o dată. Ca şi descoperirea lor, care s-a făcut treptat, înţelegerea lor se va realiza de asemenea gradat. Clarificarea ideilor în orice domeniu al fizicii se face după mai multe citiri, după reflectare proprie şi după rezolvarea a cît mai multor probleme legate de conţinutul domeniului respectiv.

* * *

Sînt convins că o încercare de prezentare a fizicii care să satisfacă cerinţele acestui nivel nu poate reuşi de la prima ediţie. Numai „reacţia" cititorilor, atît a celor care folosesc această carte în scopul predării cît şi a celor care o folosesc în scopul învăţării fizicii, poate decide continuarea unei astfel de încercări de prezentare.

Autorul

Cuprinsul

Capitolul 1. **Introducere**

1.1. Obiectul fizicii 9
1.2. Metoda fizicii 11
1.3. Diviziunile fizicii 12
1.4. Legi, teoreme şi definiţii 13
1.5. Fenomenul măsurării 17
1.6. Scrierea valorilor numerice 18
1.7. Fundamentele calculului vectorial 20

Capitolul 2. **Noţiuni fundamentale**

2.1. Mărimile fizicii 22
2.2. Cinematica şi dinamica punctului 24
2.3. Cinematica şi dinamica solidului 27
2.4. Calorimetria 28
2.5. Oscilaţii şi unde 31
2.6. Electricitatea şi magnetismul 32
2.7. Constanta lui Avogadro 34

Capitolul 3. **Invarianţa galileiană**

3.1. Relativitatea mişcării 36
3.2. Transformarea ecuaţiei mişcării 37
3.3. Expresia vitezei relative 38
3.4. Mişcarea aparentă diurnă 43
3.5. Mişcarea circulară relativă 45
3.6. Două corpuri în mişcare circulară 47
3.7. Principiul invarianţei galileiene 48

Capitolul 4. **Invarianţa einsteiniană**

4.1. Experimentul lui Michelson şi Morley 51
4.2. Principiul invarianţei einsteiniene 52
4.3. Transformările lui Lorentz 55
4.4. Contracţia spaţiului 58
4.5. Dilatarea timpului 60
4.6. Compunerea vitezelor 62
4.7. Concluzie 64

Capitolul 5. **Legile dinamicii**

5.1. Experimente fundamentale 66
5.2. Legea conservării impulsului 69
5.3. Legea inerţiei şi legea forţei 72
5.4. Teorema acţiunii şi reacţiunii 75
5.5. Propulsarea rachetei 76
5.6. Legile dinamicii în mişcarea circulară 79
5.7. Relativitatea masei 81

Capitolul 6. **Forţele**

6.1. Forţe fundamentale şi forţe de frecare.... 86
6.2. Reacţiunile legăturilor 88
6.3. Precizări la legea forţei..... 90
6.4. Forţele de inerţie în mişcarea rectilinie relativă 93
6.5. Forţele de inerţie în mişcarea circulară relativă 96
6.6. Lucrul forţei 99
6.7. Forţele conservative 103

Capitolul 7. **Dinamica solidului**

7.1. Generalităţi 105
7.2. Centrul de masă 108
7.3. Echilibrul corpului solid 111
7.4. Calculul momentului de inerţie 113
7.5. Dinamica rotaţiei 116
7.6. Translaţia şi rotaţia 119

Capitolul 8. **Gravitaţia**

8.1. Legea lui Newton 122
8.2. Cîmpul gravitaţional 124
8.3. Mişcarea relativă în cîmpul gravitaţional 127
8.4. Lucrul forţei gravitaţionale 129
8.5. Mişcarea pe orbita gravitaţională 131
8.6. Evadarea din cîmpul gravitaţional 136
8.7. Călătoria Pămînt-Lună-Pămînt 140
8.8. Concluzie 147

Capitolul 9. **Energia**

9.1. Energia cinetică şi energia potenţială.... 149
9.2. Energia de legătură 150
9.3. Transformarea energiei 153
9.4. Echivalenţa masă-energie 154
9.5. Legea conservării energiei 159
9.6. Energia termică şi energia internă 162
9.7. Principiile fizice ale energeticii 165

Capitolul 10. **Mecanica statistică**

10.1. Legea gazului perfect 170
10.2. Teoria cinetică a gazelor 174
10.3. Energia cinetică moleculară 177
10.4. Distribuţia moleculelor în atmosferă.. 178
10.5. Legea lui Boltzmann 181
10.6. Distribuţia vitezelor moleculelor 183
10.7. Atmosfera planetelor 188

Capitolul 11. **Legea întîi a termodinamicii**

11.1. Sistem şi stare 191
11.2. Legea întîi a termodinamicii pentru procesele adiabatice 193
11.3. Calculul lucrului la schimbarea de stare 194
11.4. Procesul izoterm 196
11.5. Procesul adiabatic 197
11.6. Exprimarea generală a legii întîi a termodinamicii 200
11.7. Procesele ciclice monoterme 203

Capitolul 12. **Legea a doua a termodinamicii**

12.1. Ciclul Carnot direct 206
12.2. Ciclul Carnot inversat 209
12.3. Relaţia între Q_c, Q_r, T_c şi T_r 211
12.4. Enunţul legii a doua a termodinamicii 213
12.5. Teorema lui Carnot 214
12.6. Aplicarea ciclului Carnot inversat..... 215
12.7. Entropia 218

Capitolul 13. **Oscilaţii şi unde**

13.1. Oscilaţii şi oscilatori 221
13.2. Compunerea oscilaţiilor 224
13.3. Analiza Fourier 227
13.4. Propagarea oscilaţiilor 232
13.5. Coerenţa 236
13.6. Efectul Doppler 240

Capitolul 14. **Legile electromagnetismului**

14.1. Fenomene fundamentale 243
14.2. Cîmpul electric în vid..... 246
14.3. Calculul cîmpului electric 250
14.4. Potenţialul electric 251
14.5. Cîmpul magnetic în vid 253
14.6. Forţele în cîmpul electric şi magnetic.. 256

Capitolul 15. **Cîmpul electromagnetic**

15.1. Semnificaţia fluxului total 261
15.2. Semnificaţia circulaţiei 265
15.3. Ecuaţiile lui Maxwell 267
15.4. Propagarea cîmpului electromagnetic .. 270
15.5. Viteza de propagare 275
15.6. Energia cîmpului electromagnetic 279

Anexa 1. *Calculul integralei* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ 282
Anexa 2. *Constante fizice fundamentale* 282
Anexa 3. *Sistemul Internaţional* 283
Anexa 4. *Elemente de algebră şi analiză vectorială* 287

Capitolul 1

Introducere

1.1. Obiectul fizicii

Fizica *descrie* lumea înconjurătoare de la microcosm (structura moleculelor, a atomilor sau a nucleelor) pînă la macrocosm (structura sistemului solar, a nebuloaselor sau a galaxiilor), cu un cuvînt, fizica descrie Universul în care trăim. Universul este nemărginit atît în sensul dimensiunilor mari (se descoperă sisteme astrale la distanţe din ce în ce mai mari) cît şi în sensul dimensiunilor mici (după ce s-au pus în evidenţă particulele, numite elementare, se caută astăzi quarkurile care ar constitui pe celelalte). În tabelul 1.1. sînt date cîteva exemple de lungimi foarte mari şi foarte mici din natură.

Tabelul 1.1

Lungimi foarte mari şi foarte mici în natură

Lungimea	Metri	Ani-lumină
Diametrul Universului	$\sim 10^{26}$	$\sim 10^{10}$
Diametrul Galaxiei	$\sim 10^{21}$	$\sim 10^{5}$
Diametrul sistemului solar	$1{,}2 \cdot 10^{13}$	
Diametrul Soarelui	$1{,}4 \cdot 10^{9}$	
Diametrul Pămîntului	$1{,}3 \cdot 10^{7}$	
Diametrul planetei Hermes*	$1{,}5 \cdot 10^{3}$	
Diametrul moleculei	$10^{-7} \ldots 10^{-9}$	
Diametrul atomului	$\sim 10^{-10}$	
Diametrul nucleului	$\sim 10^{-15}$	

* descoperită de Reinmuth în 1937

Pe lîngă lungime, o altă mărime care joacă un rol foarte important în descrierea Universului este timpul, pentru că fenomenele din natură au o anumită „durată". Fizica descrie atît fenomene cu durată foarte mare, de exemplu, formarea şi evoluţia Universului, cît şi fenomene cu durată foarte mică, de exemplu, dezintegrarea particulelor elementare. Tabelul 1.2 dă cîteva exemple de vîrstă sau durată medie a unor fenomene. Vîrsta este durata unui fenomen pînă în momentul observaţiei; fenomenele statistice sînt caracterizate prin durata medie.

Tabelul 1.2

Vîrsta şi durata medie a unor fenomene naturale

Fenomenul	Secunde	Ani
Vîrsta unei galaxii	$3 \cdot 10^{17}$	10^{10}
Vîrsta sistemului solar	$1{,}5 \cdot 10^{17}$	$5{,}0 \cdot 10^{9}$
Durata medie a nucleului ^{238}U	$1{,}4 \cdot 10^{17}$	$4{,}5 \cdot 10^{9}$
Durata medie a nucleului ^{14}C	$1{,}8 \cdot 10^{11}$	$5{,}7 \cdot 10^{3}$
Durata medie a nucleului ^{60}Co	$1{,}7 \cdot 10^{8}$	5,3
Durata medie a neutronului	650	
Durata medie a mezonului μ^+	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	
Durata medie a mezonului π^0	$7 \cdot 10^{-17}$	

De-a lungul anilor şi în special în ultimele decenii obiectul fizicii a devenit din ce în ce mai complex. Posibilitatea cunoaşterii legilor după care se comportă substanţa de la atom pînă la galaxie a crescut. În această acumulare de cunoştinţe, în continuă creştere, există, totuşi, o idee de bază care caracterizează structura Universului de la microcosm la macrocosm; aceasta s-ar putea numi „structură discontinuă" sau „cuantificare" sau chiar „atomism". Toată lumea înconjurătoare este formată dintr-un număr limitat de *particule elementare* care stau la baza formării atomilor. Se cunosc astăzi 105 specii atomice (elemente), ale căror nuclee prezintă o diversitate destul de mare; numărul speciilor nucleare cunoscute se ridică la 1 500.

Toate corpurile din natură sînt formate din molecule în a căror constituţie intră mai mulţi sau mai puţini atomi. Corpurile vii conţin molecule foarte mari, de exemplu, edificiul moleculei de acid dezoxiribonucleic (ADN) are $10^8 ... 10^{10}$ atomi. În organismul uman intră un număr de 10^{16} celule, fiecare celulă cu $10^{12} ... 10^{14}$ atomi.

Substanţa din Univers se caracterizează mai uşor prin numărul de nucleoni (protoni şi neutroni), deoarece în cea mai mare parte această substanţă se găseşte sub formă de plasmă. Numărul de nucleoni din Univers este apreciat astăzi, din numărul stelelor şi galaxiilor cunoscute, la 10^{80} nucleoni, cu un factor de nesiguranţă de 100; în Soare sînt 10^{57} nucleoni, iar în planeta locuită de oameni $4 \cdot 10^{51}$ nucleoni. Substanţa din Univers este conţinută în $10^{80}/10^{57} = 10^{23}$ stele*, iar acestea sînt grupate în galaxii, Galaxia noastră (fig. 1.1) avînd $2 \cdot 10^{11}$ stele.

* În acest calcul s-a lăsat deoparte substanţa planetelor, deoarece masa acestora este neglijabilă faţă de aceea a stelelor.

1.2. Metoda fizicii

Metoda fizicii constă în modul de „descriere" a fenomenelor fizice. Descrierea acestor fenomene se face după un procedeu caracteristic acestei discipline. Însușirea procedeului de descriere a fenomenelor fizice trebuie să fie obiectivul inițial al celui ce vrea să învețe fizica. În plus, trebuie subliniat de la început că procedeul de descriere a fenomenelor fizice este caracteristic unei etape de dezvoltare a fizicii și ca atare și unei anumite etape de studiu al fizicii. Iată cîteva din caracteristicile acestui procedeu.

În primul rînd, *descrierea fenomenelor fizice are nevoie de un instrument matematic.* Alegerea celui mai adecvat instrument matematic este o problemă de experiență*. Pentru etapa de studiu a cărții de față, etapa postliceală, ca și în aceea liceală, instrumentul matematic trebuie să fie cel mai simplu,

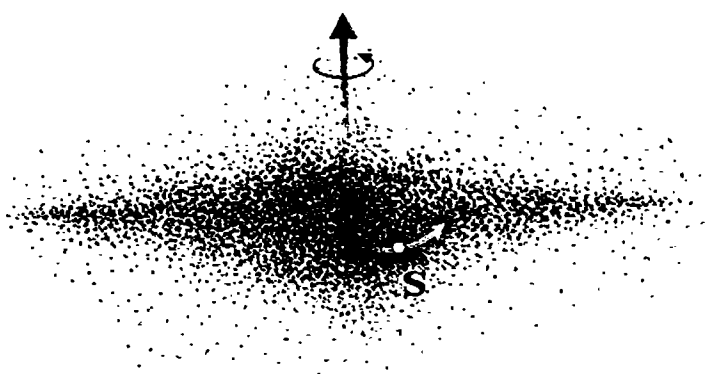


Fig. 1.1 Forma galaxiei. Se observă Soarele *S*, mișcarea sa în Galaxie și mișcarea Galaxiei

dar corect, și care să conducă totuși la aceleași rezultate ca și cel folosit într-o etapă superioară. De exemplu, la compunerea vitezelor în mișcarea relativă, se poate renunța la exprimarea vectorială, lucrînd cu mobile ce se mișcă pe aceeași direcție. Dar în expunerea legilor electromagnetismului nu se poate renunța, în această etapă, la divergență și rotor, două concepte matematice, dar pline de semnificații fizice.

În al doilea rînd, *descrierea fenomenelor fizice se bazează, într-o anumită etapă, pe un sistem de legi extrase din experimente.* Sistemul de legi al fizicii poate diferi de la o etapă de studiu la alta, după cum diferă de la o etapă de dezvoltare a fizicii la alta. De exemplu, într-o etapă anterioară erau expuse legile gazelor (Gay Lussac, Boyle Mariotte, Charles etc.) pe cînd în etapa

* În această carte se folosesc termenii: *experiment* și *experiență*, a căror precizare este necesară. Pentru stabilirea sau verificarea unei legi se execută un *experiment* (nu o experiență), iar montajul *experimental* poate fi mai simplu sau mai complicat. Prin executarea multor *experimente* studentul sau cercetătorul cîștigă *experiență*; ceea ce îi permite acestuia să descopere lucruri noi este *experiența* sa realizată prin efectuarea multor *experimente*.

actuală descrierea fenomenelor în gaze se face cu ajutorul unei singure legi a gazelor din care se deduc, ca teoreme, aşa-zisele „legi" din etapa anterioară. De asemenea, într-o etapă de dezvoltare mai veche, descrierea fenomenelor electrostatice se făcea cu legea lui Coulomb, din care se deducea teorema lui Gauss, pe cînd astăzi aceleaşi fenomene se descriu cu legea lui Gauss, din care se deduce teorema lui Coulomb. Asupra problemei legilor şi teoremelor se va reveni în § 1.4.

În al treilea rînd, *descrierea anumitor fenomene ale fizicii se face cu o metodă într-un capitol şi cu altă metodă în alt capitol.* De exemplu, în mecanica corpurilor macroscopice metoda deterministă este folosită din plin, dar în mecanica particulelor elementare nu se mai poate folosi aceeaşi metodă. Nu se poate construi o imagine a lumii microfizice, numai pe baza legilor deterministe ale macrofizicii.

În fine, în al patrulea rînd, *descrierea unor fenomene fizice se face prin aproximaţii.* Într-o anumită etapă de studiu se concepe un model simplu al fenomenului, cu ajutorul unor ipoteze simplificatoare. În altă etapă, modelul fenomenului se modifică ca să se apropie mai mult de rezultatele experimentale obţinute între timp şi aşa mai departe. Ca exemplu de acest mod de descriere a unui fenomen fizic este mişcarea electronului în jurul nucleului atomului. Ce simplu este atomul lui Bohr şi ce modele au apărut ulterior pentru a interpreta toate datele experimentale!

Caracteristicile, menţionate mai sus, ale procedeului de studiu folosit în fizică, arată, pe de o parte, deosebirea esenţială între fizică şi celelalte discipline, de exemplu matematica, iar pe de altă parte, dificultăţile mari care apar în predarea fizicii şi în învăţarea ei. Cu cît caracteristicile sistemului de descriere folosit în fizică sînt mai bine precizate de la început, cu atît cititorii acestei cărţi vor înţelege mai bine drumul parcurs în descrierea fenomenelor fizice.

1.3. Diviziunile fizicii

Dezvoltarea aproape explozivă a fizicii, din ultimele decenii, a condus la o diversitate impresionant de mare a subdiviziunilor sale. Clasificarea părţilor componente ale fizicii se poate face din mai multe puncte de vedere. Cititorul trebuie să cunoască, încă de la început, cîteva din ele, pentru că în unele capitole va face apel la bibliografie suplimentară şi el trebuie să ştie cum să o caute.

Cea mai veche împărţire a fizicii se bazează pe *gruparea fenomenelor fundamentale,* de exemplu:

mecanica,
căldura şi termodinamica,
oscilaţii şi unde,
electricitatea şi magnetismul.

Această clasificare are rădăcini adînci în istoria fizicii şi este folosită încă de mulţi autori.

Pornind de la structura substanţei şi considerînd drept criteriu de clasificare *părţile componente ale substanţei,* fizica poate avea următoarele diviziuni:

fizica moleculară,
fizica atomică,
fizica nucleară,
fizica electronică,
fizica particulelor elementare.

După *starea substanţei*, clasificarea fizicii este:

fizica solidului,
fizica lichidelor,
fizica gazelor,
fizica plasmei.

În fine, se mai foloseşte o împărţire a fizicii în funcţie de unele *aspecte ale naturii* care au impus concepţii noi în fizică şi care au revoluţionat ideile noastre despre lumea înconjurătoare:

fizica relativistă,
fizica statistică,
fizica cuantică.

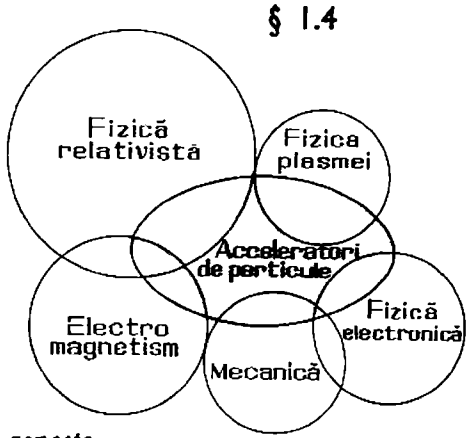


Fig. 1.2. Exemplu de întrepătrundere a unor domenii ale fizicii

Astăzi, diferitele diviziuni arătate mai sus se întrepătrund şi în manualele moderne de fizică, autorii recurg la soluţii aparent inconsecvente în clasificarea fizicii. Cursul de fizică al lui Feynmann* şi cursul de fizică de la Berkeley** sînt cele mai bune ilustrări din acest punct de vedere. Un exemplu de întrepătrundere a capitolelor fizicii este arătat în figura 1.2.

În cartea de faţă s-a recurs la clasificarea care ţine seama de cunoştinţele presupuse acumulate din studiul fizicii de liceu şi de scopul propus: acela de a oferi cititorului posibilitatea de înţelegere a celor mai recente descoperiri din fizică.

1.4. Legi, teoreme şi definiţii

În descrierea fenomenelor fizice legile, teoremele şi definiţiile au un rol bine determinat, care trebuie să fie perfect însuşit de cel ce vrea să înveţe fizica.

Într-un fenomen sau grup de fenomene asemănătoare *legea descrie matematic esenţialul*, sub forma unei *relaţii matematice între mărimile caracteristice*. De exemplu, pentru descrierea fenomenului gravitaţional (numit atracţia universală, în fizica de liceu), legea lui Newton exprimă matematic legătura între masele celor două corpuri, distanţa dintre ele şi constanta gravitaţională. Important este faptul că fizica descrie gravitaţia prin legea lui Newton şi nu explică de ce legea lui Newton are această formă. Fizica nu poate spune în etapa actuală de ce corpurile se atrag proporţional cu produsul maselor

* R. Feynman, R. Leighton, M. Sands. *Fizica modernă* (2 vol.) E.T., Bucureşti, 1969, 1970

** x x x Berkeley *Physics Course*: vol. I, *Mechanics* (Kittel, Knight, Ruderman), vol. II, *Electricity and Magnetism* (Purcell), vol. III, *Waves and Oscilations* (Crawford), vol. IV, *Quantum Physics* (Wichmann), vol. V, *Statistical Physics* (Reif) McGraw Hill, New York, 1965 ... 1970.

şi invers proporţional cu pătratul distanţei dintre ele; ea arată numai cum se petrec lucrurile în natură.

Din legea gravitaţiei a lui Newton se pot demonstra cu ajutorul relaţiilor matematice mai multe teoreme. De exemplu, se introduce prin definiţie cîmpul gravitaţional g, ca raportul dintre forţa gravitaţională F şi una din mase m,

$$g \equiv \frac{F}{m} \; *$$

Pentru un corp de masă m care se mişcă pe o orbită gravitaţională circulară, forţa lui Newton mg este egală cu forţa de inerţie centrifugă mv^2/R, v fiind viteza pe orbita circulară, iar R raza orbitei circulare

$$mg = m\frac{v^2}{R}$$

De aici se deduce viteza corpului pe orbita circulară

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

care constituie o teoremă dedusă din legea lui Newton; această teoremă se poate numi teorema vitezei pe orbita gravitaţională circulară. Teorema include în ea o explicaţie: viteza pe orbita circulară are această formă deoarece s-a admis legea lui Newton ca atare. Cu alte cuvinte, dacă pentru lege nu se poate pune întrebarea: „de ce are această formă?", pentru teoremă se poate pune această întrebare şi fizica dă un răspuns explicativ. În general, pentru stabilirea unei teoreme este nevoie de o relaţie de definiţie prin care se introduce o anumită mărime, aşa cum s-a introdus mai sus cîmpul gravitaţional în funcţie de forţa gravitaţională şi de masă.

Prin urmare, o lege fizică descrie matematic un fenomen fără a furniza vreo explicaţie cauzală. Această situaţie este asemănătoare cu aceea a axiomelor din matematică. Fizica *nu oferă semnificaţia unei legi*, în sensul că nu arată de ce o lege este dată cu formularea respectivă. Cu privire la aceasta, Max von Laue** spune: „Fizica nu poate şi nu trebuie să ofere mai mult. Explicaţia unui proces natural poate consta în a-l pune în relaţie cu alte procese, prin intermediul unor legi cunoscute ale naturii". Cînd se vorbeşte despre *deducerea* unei legi trebuie să ne gîndim la *extragerea* ei din faptele experimentale şi nicidecum la demonstrarea ei matematică din alte expresii mai generale. Dacă o relaţie fizică poate fi demonstrată matematic, atunci această relaţie nu este lege ci teoremă. Unei teoreme i se poate cere semnificaţia şi aceasta poate fi dată numai în funcţie de legea din care a fost dedusă.

Consideraţiile făcute în acest paragraf trebuie să constituie un ghid pentru începătorul în studiul fizicii. El trebuie să admită legile ca atare şi să nu caute explicaţia lor într-o anumită etapă de dezvoltare a fizicii. Această precizare este necesară deoarece, în timp, descrierea fenomenelor fizice devine mai profundă şi se găsesc legi mai generale, în sensul că unele legi considerate

* Semnul ≡ se foloseşte pentru expresia „egal prin definiţie".

** Max von Laue: *Istoria fizicii*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1965, p. 29.

astăzi ca atare devin teoreme. În aceasta constă dificultatea învățării fizicii: pe de o parte numărul legilor este foarte mare, iar pe de altă parte, ansamblul legilor fizicii se schimbă în timp. Trebuie precizat că fizica de liceu se bazează pe aproximativ 40 de legi, pe cînd într-o etapă postliceală se lucrează cu aproape 100 de legi, unele din legile din fizica de liceu devin teoreme în această etapă. Într-un stadiu mai avansat al studiului fizicii se întîlnesc din ce în ce mai multe legi din cauza numărului mare al *legilor de material* care descriu proprietățile materialelor.

În sistematica fizicii se întîlnesc și principii, de exemplu, principiul conservării energiei, principiile termodinamicii etc. Prin *principiu* se înțelege adevărul fundamental care nu se extrage dintr-un anumit experiment, ci se impune prin faptul că nu este infirmat de nici un experiment. În timp, fizica experimentală a ajuns la anumite experimente, din care s-au putut deduce, pe alte baze, principiile. De aceea, în prezentările moderne ale fizicii, există tendința ca principiile să fie considerate legi; de exemplu, se vorbește de legile termodinamicii în loc de principiile termodinamicii.

În continuare se va arăta deducerea unei teoreme dintr-o lege, cu ajutorul unei definiții, pe un exemplu din geometrie; geometria este de fapt primul capitol al fizicii.

Exemplu

În geometrie, una din cele mai importante legi este aceea care arată că lungimea L a circumferinței cercului este proporțională cu diametrul D al cercului

$$L = \text{const. } D$$

Constanta de proporționalitate, denumită π, este o constantă universală ca și constanta gravitației sau constanta lui Planck. Determinarea acestei constante se poate face experimental prin măsurarea lungimii circumferinței și a diametrului unui cerc. Raportul acestor două lungimi dă

$$\pi = 3{,}14...$$

Valoarea exactă a constantei universale π va fi discutată mai departe. Deocamdată se precizează că această lege a geometriei afirmă că diametrul unui cerc se cuprinde în circumferința sa de 3,14... ori. Este lipsit de sens fizic să se pună întrebarea de ce diametrul se cuprinde de 3,14... ori în circumferința cercului respectiv. Această lege a geometriei, de altfel, ca orice lege a fizicii, nu furnizează o explicație cauzală, ci redă numai un anumit fenomen. De reținut: cu cît constanta π este determinată mai exact, cu atît legea respectivă este mai exactă.

Introducînd, prin definiție, raza cercului $r \equiv D/2$, se poate scrie legea de mai sus sub forma

$$L = \pi D = 2\pi r$$

Din această lege se poate deduce matematic aria suprafeței cercului. Pentru aceasta se introduce unghiul elementar $d\alpha$ prin relația de definiție

$$d\alpha \equiv \frac{ds}{r}$$

unde ds este lungimea arcului elementar (figura 1.3). Ca urmare, aria suprafeței cercului este

$$A = \iint dA = \iint ds \cdot dr = \iint r \cdot d\alpha \cdot dr$$

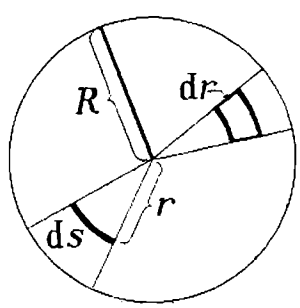


Fig. 1.3. Pentru definiția unghiului plan și pentru calculul ariei suprafeței cercului

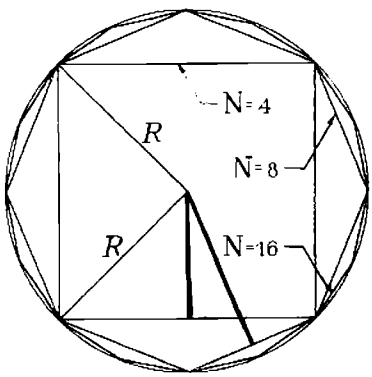


Fig. 1.4. Calculul constantei universale π, prin aproximații succesive, ca raportul dintre perimetrul poligonului regulat înscriptibil cu $N = 2^x$ laturi ($x \geqslant 2$) și diametrul cercului, egal cu diagonala poligonului regulat înscriptibil

integrala efectuîndu-se pentru toată aria cercului, adică pentru întreg domeniul de variație al unghiului α și al razei r

$$A = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R r\, dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Aceasta este o teoremă, dedusă dintr-o lege. Semnificația sau explicația teoremei constă tocmai în deducerea ei din lege.

Cu privire la determinarea constantei π. S-a spus mai înainte că valoarea constantei π se poate determina experimental, măsurînd diametrul și lungimea circumferinței unui cerc. Dacă se folosește o metodă precisă pentru măsurarea acestor lungimi se poate obține numărul π cu patru sau chiar cinci cifre semnificative. S-ar putea găsi metode experimentale și mai precise pentru a obține mai multe cifre semnificative și a cunoaște mai bine această constantă importantă a geometriei. Există însă și o altă cale de determinare a constantei π și anume prin calcul. Cu ajutorul teoremei lui Pitagora se poate calcula latura unui poligon regulat inscriptibil în funcție de raza cercului. În acest fel rezultă expresia perimetrului poligonului regulat inscriptibil și numărul π poate fi aproximat prin raportul dintre perimetrul acestui poligon și dublul razei. Dublul razei, adică diametrul cercului, este totdeauna egal cu diagonala poligonului regulat inscriptibil. Pentru ușurința calculului se pleacă de la pătrat și se dublează mereu numărul laturilor, folosind de fiecare dată teorema lui Pitagora pentru calculul laturii poligonului respectiv.

De exemplu, latura pătratului calculată cu ajutorul teoremei lui Pitagora fiind $\sqrt{2}\,R$, latura octogonului se determină, tot prin intermediul teoremei lui Pitagora, din semilatura pătratului și din diferența dintre raza R și apotema pătratului, după cum se vede în figura 1.4.

Raportul dintre perimetrul poligonului regulat înscriptibil cu $N = 2^x$ laturi ($x \geqslant 2$) și diametrul cercului este o aproximație din ce în ce mai bună a numărului π pe măsură ce numărul laturilor poligonului devine din ce în ce mai mare (tabelul 1.3).

Tabelul 1.3

Valorile raportului dintre perimetrul poligonului regulat înscriptibil și diametrul cercului în funcție de numărul laturilor poligonului.

S-au indicat numai cifrele care arată variația semnificativă a valorilor respective.

Numărul laturilor	Raportul dintre perimetru și diametru	
4	$2\sqrt{2}$	= 2,8.. ... ...
8	$4\sqrt{2-\sqrt{2}}$	= 3,0.. ... ...
16	$8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	= 3,12. ... ...
32	$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	= 3,13. ... ...
64	$32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	= 3,140 ... ...
128	$64\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$	= 3,141 1.. ...
∞		3,141 593 ...

1.5. Fenomenul măsurării

Cel mai important fenomen al fizicii este măsurarea, deoarece stabilirea şi verificarea legilor şi teoremelor se face cu ajutorul unor experimente în care trebuie măsurate mărimile caracteristice. Pentru studiul unui fenomen nou sau reproducerea unor fenomene cunoscute, se aleg mărimile caracteristice respective şi care se măsoară prin procedee de măsurare adecvate. De exemplu, pentru verificarea legii de cădere în cîmpul gravitaţional se măsoară spaţiile şi timpurile corespunzătoare. Procedeele de măsurare a spaţiului şi a timpului sînt bine cunoscute şi experimentul ar fi extrem de simplu dacă nu s-ar pune problema mărimilor care influenţează măsurarea şi aceea a preciziei măsurării.

Fenomenul măsurării se suprapune fenomenului studiat şi există totdeauna o interacţiune între cele două fenomene. De exemplu, în măsurarea unei lungimi pot apărea în timpul măsurării variaţii ale lungimii etalon (ruleta, fir gradat în lungime etc.) şi ale lungimii de măsurat, datorită variaţiilor de temperatură ale mediului în timpul experimentului. Cele două lungimi nu au variaţii egale, deoarece, în general, coeficienţii de dilatare sînt diferiţi. Întrucît temperatura influenţează măsurarea, se spune că aceasta este o *mărime de influenţă* în fenomenul măsurării. Există şi alte mărimi de influenţă (presiunea, cîmpul magnetic etc.), dar temperatura rămîne de multe ori cea mai importantă. Printre mărimile de influenţă se consideră şi atenţia operatorului, deoarece datorită acesteia se obţin variaţii ale măsurării, prin faptul că operatorul citeşte valori diferite pe scala aparatului de măsurare, deşi mărimea măsurată rămîne constantă.

În ceea ce priveşte precizia unei măsurări, aceasta depinde de metoda sau aparatul folosite pentru măsurare. Un mijloc de măsurare oarecare este caracterizat, prin însăşi construcţia sa, printr-o anumită *sensibilitate*. Sensibilitatea se apreciază prin mărimea cea mai mică care poate fi măsurată cu aparatul respectiv. De exemplu, un cîntar poate măsura mase din ce în ce mai mici pînă la 10 grame, în sensul că mase mai mici de 10 grame nu produc nici o mişcare a părţii mobile a cîntarului; cu alte cuvinte sub 10 grame = 0,01 kg cîntarul este insensibil. O balanţă de laborator poate să măsoare mase foarte mici, sensibilitatea acesteia fiind mult mai mare; astfel o masă de numai 0,1 g = 10^{-4} kg poate să producă o mişcare sesizabilă a acului balanţei. Prin urmare, o aceeaşi masă măsurată cu cîntarul şi cu balanţa va conduce la rezultate diferite din cauza sensibilităţilor diferite ale aparatelor. De exemplu, cu cîntarul se obţine $m = 0{,}20$ kg, căci nu există nici o indicaţie asupra miimilor de kilogram, iar cu balanţa de laborator se obţine $m = 0{,}2015$ kg, deoarece aceasta indică nu numai zecile de grame şi gramele, dar chiar şi zecimile de gram. Aceste două rezultate trebuie scrise împreună cu erorile lor; eroarea asupra rezultatului este dată de valoarea cea mai mică a mărimii de măsurat care poate fi pusă în evidenţă prin măsurarea respectivă.

În exemplul de mai sus cele două cîntăriri se vor scrie

$$m = (0{,}20 \pm 0{,}01)\ \text{kg}$$

$$m = (0{,}2015 \pm 0{,}0001)\ \text{kg}$$

deoarece la cîntar 0,01 kg este masa minimă care poate fi măsurată, iar la balanţa de laborator această masă este 10^{-4} kg. Din acest exemplu se vede

că al doilea rezultat este mai precis decît primul, în sensul că, în acest caz, sînt precizate mai multe fracțiuni de kilogram. Rezultă de aici că la sensibilitatea unui aparat de măsurare mai mare corespunde o eroare a măsurării mai mică. Observînd cele două rezultate se remarcă faptul că unei precizii mai mari îi corespunde un număr mai mare de cifre semnificative. Acest aspect va fi examinat în paragraful următor.

Ceea ce este important de subliniat este faptul că rezultatul unei măsurări trebuie scris cu eroarea sa. *Eroarea arată încrederea care se poate acorda rezultatului unei măsurări.* De exemplu, într-un circuit se măsoară curentul electric cu două ampermetre, care dau erori diferite, și în ambele cazuri se obține $I = 0{,}12$ A, dar la primul ampermetru eroarea este 0,05 A, pe cînd la al doilea este 0,01 A. Cele două rezultate ale măsurărilor

$$I = (0{,}12 \pm 0{,}05)\ \text{A}$$

$$I = (0{,}12 \pm 0{,}01)\ \text{A}$$

nu sînt identice și anume, al doilea este mai precis decît primul, deoarece are o eroare mai mică. Este lipsit de sens fizic să se dea un rezultat fără eroarea sa. Este greșit să se afirme că s-a executat o măsurare în care s-au eliminat complet erorile. În fenomenul măsurării apar totdeauna cauze de erori, și de aceea eroarea rezultatului este totdeauna diferită de zero. Îmbunătățind metodele de măsurare se obține reducerea erorii, dar eroarea nu se anulează niciodată.

O măsurare poate fi caracterizată și prin *eroarea relativă*, care este raportul dintre eroare și mărimea măsurată. De exemplu, la măsurarea curentului cu cele două ampermetre s-au obținut erorile relative

$$\frac{0{,}05}{0{,}12} = 0{,}41 = 41\% \quad \text{și} \quad \frac{0{,}01}{0{,}12} = 0{,}08 = 8\%$$

Eroarea relativă este importantă în caracterizarea metodelor de măsurare în diferite domenii ale tehnicii și științei. Astfel, măsurarea lungimilor în tehnică se face cu o eroare relativă de 0,1%, pe cînd în mecanica fină cu 0,01% și chiar 0,001%. Măsurarea maselor în comerțul obișnuit se face cu o eroare relativă de 1%, dar în chimia analitică cu numai 10^{-4}%. În ceea ce privește măsurarea timpului, domeniul valorilor erorii relative este și mai mare. La ceasornicele obișnuite, la care se cere o eroare de cel mult 10 s la 24 h ($\sim 9 \cdot 10^4$s) eroarea relativă este

$$\frac{10}{9 \cdot 10^4} \cong 10^{-4} = 10^{-2}\%$$

La ceasornicele de laborator de mare precizie, eroarea este de 1 s la 1 an, adică 10^{-5}%, iar la ceasornicele atomice 1 s la 3 000 a, adică 10^{-9}%.

1.6. Scrierea valorilor numerice

Rezultatul unei măsurări se exprimă prin valoarea numerică și unitatea de măsurare. În paragraful anterior s-a arătat că valoarea numerică a rezultatului are mai multe cifre semnificative dacă precizia măsurării este mai

mare. Trebuie să se precizeze că zerourile dinaintea primei cifre diferite de zero nu sînt cifre semnificative, pe cînd toate celelalte zerouri sînt cifre semnificative. De exemplu, volumul molar al unui gaz perfect se poate scrie

$$V = 0{,}022\ 420\ \text{kl} = 22{,}420\ \text{l} = 22\ 420\ \text{cm}^3$$

Deşi se foloseşte în fiecare caz o altă unitate, mărimea V se exprimă prin acelaşi număr de cifre semnificative (cinci). Întrucît precizia nu trebuie să depindă de unitatea aleasă pentru exprimarea rezultatului, numărul de cifre semnificative trebuie să fie acelaşi oricare ar fi unitatea în care se exprimă valoarea numerică. Se observă de asemenea că folosirea unor unităţi mai mici face ca ordinul de mărime al valorii numerice să crească. Dacă s-ar utiliza pentru exprimarea volumului molar o unitate şi mai mică, de exemplu milimetrul cub, ordinul de mărime ar fi mai mare, iar valoarea numerică respectivă, folosind puterile numărului zece, s-ar scrie

$$V = 22\ 420 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$$

păstrînd constant numărul cifrelor semnificative. Dacă s-ar scrie $V = 22\ 420\ 000\ \text{mm}^3$, valoarea numerică ar fi exprimată cu 8 cifre semnificative şi nu corespunde preciziei cu care această mărime este determinată (nu se ştie dacă ultimele trei cifre sînt zerouri sau alte valori).

Întru-un stadiu anterior al determinării volumului molar, precizia era mult mai mică şi anume, se cunoşteau numai două cifre semnificative, iar volumul molar se scria

$$V = 0{,}022\ \text{kl} = 22\ \text{l} = 22 \cdot 10^3\ \text{cm}^3 = 22 \cdot 10^6\ \text{mm}^3$$

Prin urmare *ordinul de mărime al valorii numerice a unei mărimi depinde de unitatea folosită, dar numărul de cifre semnificative nu depinde de această unitate, ci numai de precizia cu care este determinată mărimea respectivă.*

Eroarea care caracterizează un aparat de măsurare arată totdeauna numărul de cifre semnificative cu care trebuie scris rezultatul unei măsurări. De exemplu, cu un ampermetru a cărui eroare relativă este 5% se citeşte o valoare a curentului de 9,65 A, apreciindu-se şi sutimile de amper. Eroarea relativă de 5% înseamnă, la valoarea citită, o eroare

$$9{,}65 \times 5\% = 9{,}65 \times 0{,}05 \cong 0{,}5\ \text{A}$$

adică nesiguranţa măsurării este de 5 zecimi de amper şi deci aparatul nu poate spune nimic despre sutimile de amper. Ca urmare rezultatul măsurării trebuie scris

$$I = (9{,}7 \pm 0{,}5)\ \text{A}$$

adică numai cu două cifre semnificative.

Din calcule poate rezulta valoarea numerică a unei mărimi cu un număr destul de mare de cifre semnificative. Eroarea metodei folosite arată cîte cifre semnificative trebuie reţinute. De exemplu, se măsoară lungimile parţiale ale celor trei părţi componente ale unui corp cu o metodă de măsurare carac-

terizată printr-o eroare relativă de 1%. Se obţin trei rezultate, iar lungimea totală, egală cu suma celor trei lungimi parţiale, reiese prin adunarea acestora

$$\begin{array}{r} 8{,}6\ \text{m} \\ 0{,}77\ \text{m} \\ \underline{0{,}092\ \text{m}} \\ 9{,}462\ \text{m} \end{array}$$

Întrucit valoarea numerică totală este afectată de aceeaşi eroare relativă de 1%, adică de eroarea

$$9{,}462 \times 1\% = 9{,}462 \times 0{,}01 \cong 0{,}1$$

rezultatul trebuie scris

$$(9{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{m}$$

Deci în exprimarea rezultatului final s-au reţinut numai două cifre semnificative, impuse de eroarea metodei de măsurare folosite. Aparent, în rezultatul final nu se observă contribuţia lungimii celei mai mici; aceasta se datoreşte faptului că erorile lungimilor mari depăşesc cea mai mică valoare măsurată.

În tabele, diferitele valori numerice sînt scrise cu un anumit număr de cifre semnificative, fără a se indica eroarea respectivă. Din numărul de cifre semnificative se poate deduce eroarea de care a fost afectată mărimea respectivă la determinarea ei. De exemplu, în tabelul acceleraţiilor pămînteşti, se citeşte pentru o anumită latitudine, valoarea acceleraţiei

$$g = 9{,}806\ \text{m/s}^2$$

Ultima cifră semnificativă este incertă cu o unitate, deoarece valoarea scrisă provine prin rotunjirea oricăreia din valorile cuprinse în intervalul 9,8055... ...9,8064. Eroarea valorii scrise este deci 0,001, iar eroarea relativă este

$$\frac{0{,}001}{9{,}806} = 0{,}0001$$

ceea ce înseamnă o eroare relativă procentuală de 0,01%.

Dacă se foloseşte pentru acceleraţia pămîntească valoarea 9,81 m/s² se stabileşte, printr-un calcul asemănător, că eroarea relativă este 0,1%, iar dacă se ia valoarea şi mai rotunjită de 10 m/s², eroarea relativă creşte la 1%, care este totuşi mulţumitoare pentru calculele tehnice.

1.7. Fundamentele calculului vectorial

Folosirea calculului vectorial în fizică se bazează pe un număr de fapte experimentale. În primul rînd se observă că unele mărimi ale fizicii pot fi complet caracterizate printr-un segment orientat, adică printr-un vector. Elementele unui vector sînt: *punctul de aplicaţie, direcţia, sensul* şi *modulul* sau *mărimea* sa.

Un fapt experimental, pe care unii autori îl denumesc principiu, este acela că doi vectori cu module egale, de aceeaşi direcţie, dar de sensuri contrare, se anulează. Această „lege" se scrie în calculul vectorial

$$\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$

Observaţiile făcute aici sînt mai uşor de ilustrat, dacă se consideră o clasă particulară de vectori şi anume, forţele. În statică se foloseşte principiul că două forţe egale, de aceeaşi direcţie şi de sens contrar care acţionează asupra unui corp punctiform îşi fac echilibru, adică efectul lor este nul. S-a precizat aici „corp punctiform" deoarece acest principiu nu este adevărat pentru un corp solid. În legătură cu aceasta trebuie spus că forţele care acţionează asupra unui corp punctiform se reprezintă prin *vectori legaţi*, pe cînd forţele aplicate unui corp solid se reprezintă prin *vectori alunecători*.

Următorul principiu, fundamental pentru calculul vectorial, este principiul paralelogramului, a cărei origine este de asemenea de natură experimentală. Acesta afirmă că adunarea a doi vectori se face după binecunosuta regulă a paralelogramului. Suma $\vec{F}$ a doi vectori $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$, scrisă simbolic în calculul vectorial prin

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

are componentele şi direcţia, aşa cum rezultă din figura 1.5.

Nu ne vom ocupa aici de procedeele calculului vectorial; ceea ce este important de subliniat este că *fundamentele sale sînt izvorîte din fapte experimentale*. Pentru încheiere se vor mai da două exemple.

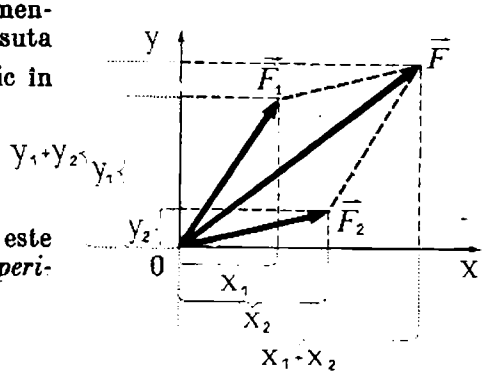


Fig. 1.5. Componentele pe axele *Ox* şi *Oy* ale vectorilor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ precum şi ale sumei $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Folosirea în fizică a *produsului scalar* a doi vectori $\vec{A}$ şi $\vec{B}$

$$C \equiv \vec{A} \cdot \vec{B}$$

este motivată prin faptul că anumite mărimi pot fi comod reprezentate prin acest concept. De exemplu, lucrul forţei $\vec{F}$, cînd punctul său de aplicaţie se deplasează cu distanţa $\vec{d}$, se exprimă prin formula

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Scriind lucrul forţei în acest fel unghiul dintre direcţiile celor doi vectori, $\vec{F}$ şi $\vec{d}$, este conţinut implicit în formulă.

Folosirea în fizică a *produsului vectorial* a doi vectori, $\vec{A}$ şi $\vec{B}$

$$\vec{D} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$$

se explică de asemenea prin posibilitatea de reprezentare a unor mărimi prin acest concept vectorial. De exemplu, momentul $\vec{\mathfrak{M}}$ al forţei $\vec{F}$ faţă de centrul de rotaţie, distanţat cu segmentul $\vec{d}$ faţă de punctul de aplicaţie al forţei $\vec{F}$, este

$$\vec{\mathfrak{M}} \equiv \vec{d} \times \vec{F}$$

Trebuie reţinut că produsul vectorial care exprimă momentul $\vec{\mathfrak{M}}$ se scrie sub forma $\vec{d} \times \vec{F}$ şi nu $\vec{F} \times \vec{d}$, deoarece scrierea produsului vectorial în acest fel include şi regula care dă sensul vectorului $\vec{\mathfrak{M}}$ şi anume sensul impus de triedrul drept (vezi fig. 1.6).

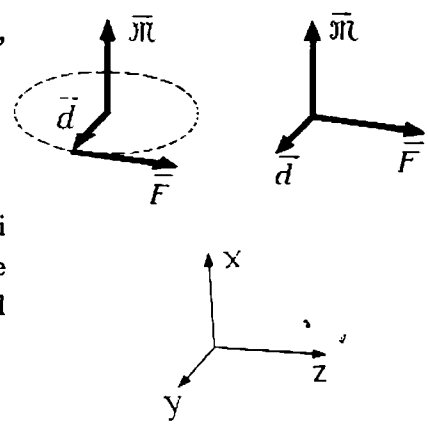


Fig. 1.6. Aplicarea triedrului drept la produsul vectorial

Capitolul 2

Noţiuni fundamentale

2.1. Mărimile fizicii

Fizica studiază fenomenele din natură cu ajutorul *mărimilor*. Caracteristica esenţială a mărimilor cu care operează fizica o constituie faptul că ele sînt *măsurabile*. Prin măsurare, mărimea respectivă se compară cu o anumită mărime de aceeaşi natură, determinîndu-se raportul între acea mărime şi mărimea cu care se compară. Din punctul de vedere al măsurabilităţii mărimilor, trebuie făcută însă o distincţie între două grupuri de mărimi: mărimi direct măsurabile *(mărimi măsurabile)* şi mărimi indirect măsurabile *(mărimi reperabile)*.

Deosebirea între cele două grupuri de mărimi se bazează pe posibilitatea de definire a operaţiilor de egalitate şi de adunare pentru o anumită specie de mărimi. Definirea acestor operaţii constă în stabilirea unor anumite procedee experimentale; ceea ce este foarte important, aceste procedee sînt caracteristice pentru o anumită mărime. Astfel, într-un fel se exprimă egalitatea a două lungimi şi în alt fel se exprimă egalitatea a două energii. De asemenea, într-un fel se face adunarea a două mase şi în alt fel se adună două sarcini electrice. Exemplul cel mai simplu se referă la mărimea cea mai uşor accesibilă: lungimea. Definirea operaţiilor de egalitate şi adunare a două lungimi se introduce în felul următor. Două lungimi AB şi CD sînt egale, cînd prin suprapunere există coincidenţa simultană a extremităţilor A şi C, respectiv B şi D (fig. 2.1). Suma a două lungimi AB şi CD este lungimea care se obţine aşezînd cele două lungimi cap la cap, pe aceeaşi direcţie, astfel încît să nu existe suprapunere (fig. 2.2).

Definirea operaţiilor de egalitate şi adunare pentru o anumită mărime o poate face aptă să intre în formulele matematice; egalitatea şi adunarea stau la baza celorlalte operaţii algebrice.

Mărimile direct măsurabile sînt acele mărimi pentru care se pot defini operaţiile de egalitate şi adunare; cu ajutorul celor două operaţii se determină raportul a două mărimi de aceeaşi natură, ceea ce conduce la stabilirea *proce-*

deului de măsurare a mărimii respective. Alegînd o anumită mărime drept *unitate* se pot măsura direct celelalte mărimi de aceeaşi natură prin procedeul stabilit. De exemplu, prin alegerea metrului ca unitate de lungime, se poate măsura oricare din lungimile întîlnite în lumea înconjurătoare cu procedeul de măsurare stabilit: se aşază metrul cap la cap, peste lungimea de măsurat; se obţine un număr (întreg sau neîntreg) care arată de cîte ori metrul se cuprinde în lungimea măsurată.

În grupul mărimilor măsurabile intră majoritatea mărimilor pe care le foloseşte fizica: lungimea, masa, energia, sarcina electrică etc.

Mărimile indirect măsurabile sau mărimile reperabile sînt acele mărimi pentru care nu se poate defini decît operaţia de egalitate. Adunarea nu se poate defini deoarece însumarea a două astfel de mărimi nu are sens fizic. De exemplu, se poate defini egalitatea a două temperaturi, dar nu are sens fizic suma a două temperaturi; de asemenea, nu are sens fizic adunarea a două altitudini. Rezultă că pentru asemenea mărimi nu se poate forma raportul a două mărimi de aceeaşi natură şi deci aceste mărimi nu se pot măsura. Întrucît fizica are nevoie de „evaluarea" acestor mărimi, se stabileşte un procedeu de evaluare cantitativă numit *procedeu de reperare*. Mărimile care se evaluează cu un procedeu de reperare se numesc mărimi reperabile; temperatura este cel mai bun exemplu de mărime reperabilă (v. § 2.4).

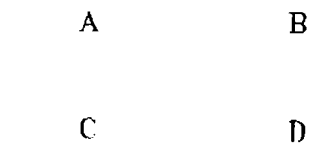


Fig. 2.1. Două lungimi sînt egale dacă extremităţile lor se suprapun simultan

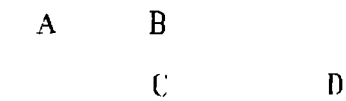


Fig. 2.2. Adunarea a două lungimi se face aşezîndu-le cap la cap fără să existe suprapunere

Mărimi fundamentale şi mărimi derivate. Multe din mărimile fizicii se introduc prin definiţie (v. şi § 1.4). De exemplu, densitatea ρ este definită ca raportul dintre masa m şi volumul V al corpului

$$\rho \equiv \frac{m}{V}$$

Prin urmare, densitatea este definită în funcţie de masă şi volum, adică în funcţie de alte mărimi. Relaţia de definiţie a unei mărimi este importantă şi pentru stabilirea unităţii de măsurare. În cazul densităţii, de exemplu, unitatea densităţii este egală cu unitatea de masă raportată la unitatea de volum: kilogramul pe metru cub. Se întîlnesc însă mărimi care nu pot fi definite în funcţie de alte mărimi, de exemplu, lungimea şi timpul. Nu există relaţii prin care să se poată defini lungimea sau timpul. Mărimile care nu pot fi definite în funcţie de alte mărimi se numesc *mărimi fundamentale*. Aici trebuie spus că există mai multe posibilităţi în ceea ce priveşte alegerea mărimilor fundamentale. De exemplu, în mecanică se poate alege fie masa, fie forţa, ca mărime fundamentală. Prin convenţia pentru constituirea Sistemului Internaţional (SI) s-a ales masa ca mărime fundamentală.

Pentru mărimile fundamentale unitatea se stabileşte convenţional şi nu în funcţie de alte unităţi. De exemplu, pentru lungime se alege o unitate de lungime arbitrară: metrul, iar pentru timp se alege secunda; acestea sînt *unităţi fundamentale*.

Mărimile definite în funcţie de mărimile fundamentale se numesc *mărimi derivate*. De exemplu, viteza, definită în funcţie de lungime şi timp, este o mărime derivată. Unitatea unei mărimi derivate este o *unitate derivată* din unităţile fundamentale, folosind relaţia de definiţie a mărimii respective. De exemplu, unitatea vitezei, metrul pe secundă, este raportul celor două unităţi fundamentale: metrul şi secunda.

Există şi alte mărimi fundamentale în fizică? În multe din capitolele fizicii apar în unele relaţii, sau în unele legi cîte două mărimi noi, nedefinite

Tabelul 2.1

Mărimile fundamentale necesare în cîteva capitole ale fizicii

Capitolul fizicii	Mărimile fundamentale
Geometria	L
Cinematica	LT
Dinamica	LTM
Statica	LTM
Gravitația	LTM
Calorimetria	$LTM\Theta$
Termodinamica	$LTM\Theta$
Electricitatea	$LTMQ$
Magnetismul	$LTMQ$

în capitolele anterioare. În acest caz, una din cele două mărimi trebuie luată ca mărime fundamentală pentru a o putea defini pe cealaltă, în funcție de mărimi pentru care există unități de măsurare. Așa se întîmplă cu masa în dinamică, cu temperatura în calorimetrie sau cu sarcina electrică în electricitate. Lungimea L, timpul T, masa M, temperatura Θ și sarcina electrică Q, sînt mărimi fundamentale folosite în diferitele capitole ale fizicii (tabelul 2.1).

Analiza mărimilor fizicii, pentru domeniile fizicii în care se pune problema alegerii mărimilor fundamentale, va fi făcută în paragrafele următoare; analiza se bazează pe cunoștințele din fizica de liceu.

2.2. Cinematica și dinamica punctului

Prin *punct* se înțelege în fizică un corp punctiform. Mișcarea unui astfel de corp este definită dacă se cunoaște traiectoria și ecuația mișcării. Ecuația mișcării este relația matematică între spațiu și timp. În fizica de liceu au fost stabilite ecuațiile cîtorva mișcări, de exemplu, ecuația mișcării rectilinii și uniforme și aceea a mișcării rectilinii accelerate și decelerate (frînate).

Mărimile cinematice folosite în ecuațiile mișcărilor rectilinii sînt viteza și accelerația. Aceste mărimi sînt vectori, dar ecuațiile mișcărilor studiate au fost scrise scalar și nu vectorial, deoarece majoritatea problemelor care apar în cinematică pot fi rezolvate în această formă. Și în capitolele care urmează, ecuațiile mișcărilor vor fi scrise scalar, dacă renunțarea la exprimarea vectorială nu reduce cu nimic generalitatea concluziilor respective.

Pentru descrierea mișcării circulare sînt necesare *viteza unghiulară* ω, a cărei relație este

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{2.1}$$

unde v este viteza liniară (pe circumferință), iar r este raza circumferinței, precum și *accelerația centripetă* a_c, a cărei expresie se deduce din variația vitezei în timp

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \omega \cdot v \tag{2.2}$$

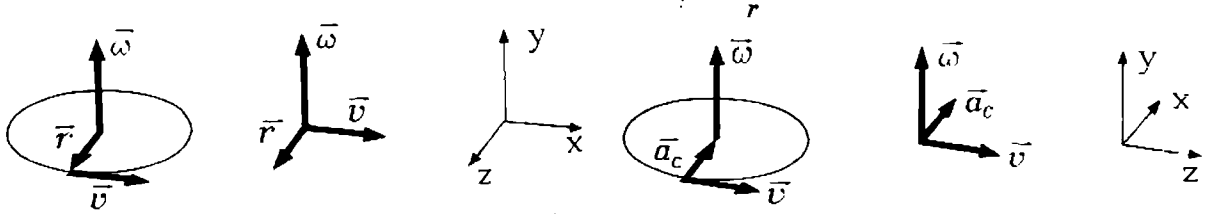


Fig. 2.3. Reprezentările vectoriale ale mărimilor caracteristice mișcării circulare uniforme. Triedrul *Oxyz* este desenat astfel încît vectorii din produsul vectorial să fie în ordinea x, y, z

Viteza unghiulară și accelerația centripetă sînt mărimi vectoriale. În fizica de liceu s-a arătat orientarea în spațiu a vectorilor viteză unghiulară $\vec{\omega}$ și accelerație centripetă $\vec{a}_c$ în funcție de aceea a vectorilor viteză liniară $\vec{v}$ și

raza $\vec{r}$ a circumferinţei, aşa cum sînt reprezentate în figura 2.3. Din această reprezentare rezultă scrierea vectorială a celor două mărimi sub forma produsului vectorial

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.3}$$

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{2.4}$$

Dacă mişcarea circulară este accelerată sau decelerată, viteza variază în timp; prin derivarea expresiei (2.3) se obţine

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_l = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{2.5}$$

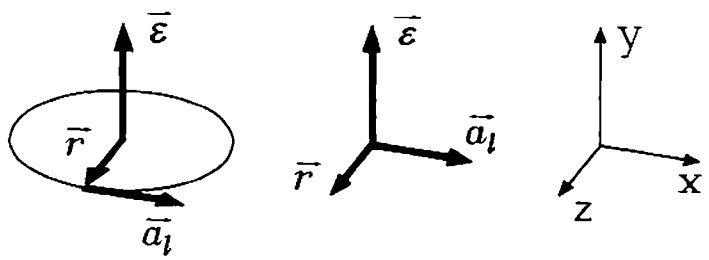


Fig. 2.4. Reprezentarea vectorială a mărimilor caracteristice mişcării circulare accelerate. Triedrul *Oxyz* corespunde ordinei vectorilor din produsul vectorial

unde $\vec{a}_l$ este *acceleraţia liniară* (pe circumferinţă) şi $\vec{\varepsilon}$ este *acceleraţia unghiulară*. Reprezentarea grafică a produsului vectorial din (2.5) este dată în figura 2.4.

Mărimile cinematice enumerate pînă aici se definesc cu ajutorul a două mărimi fundamentale: lungimea şi timpul; prin urmare, unităţile lor de măsurare se formează din unităţile fundamentale: metrul şi secunda. Pentru viteza şi acceleraţia unghiulară este necesară şi unitatea derivată — radianul — cu care se măsoară unghiul. Unităţile acestor mărimi sînt strînse în tabela 2.2.

Pentru studiul dinamicii corpului punctiform este necesară definirea *impulsului* p*

$$p \equiv m \cdot v \tag{2.6}$$

unde m este masa corpului şi v viteza sa. Această relaţie introduce două mărimi noi: masa şi impulsul; de aceea, masa trebuie aleasă ca mărime fundamentală astfel încît să se poată defini impulsul în funcţie de masă şi viteză. A alege masa ca mărime fundamentală înseamnă a-i stabili o unitate prin convenţie: kilogramul, care este deci unitatea fundamentală pentru masă.

* Pentru impuls se foloseşte simbolul p, notaţie folosită în cărţile de nivel superior din toată lumea.

În acest fel impulsul este o mărime derivată, iar unitatea sa este o unitate derivată. Alegerea ca mărime fundamentală este mai avantajoasă pentru masă decît pentru impuls, deoarece unitatea masei se realizează în concret mult mai ușor decît unitatea impulsului.

Următoarea mărime a dinamicii este forța definită ca derivata impulsului în timp

$$F \equiv \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{2.7}$$

În această relație de definiție, apare numai forța ca mărime nouă și de aceea unitatea sa se poate deriva din unitatea vitezei și unitatea timpului. Unitatea

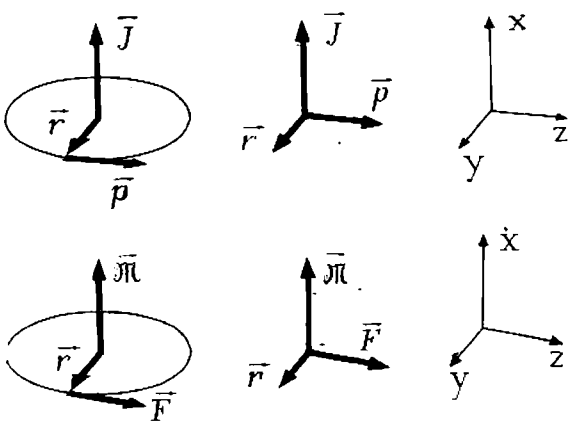


Fig. 2.5 Reprezentările vectoriale ale momentului impulsului și momentul forței. Triedrul *Oxyz* corespunde ordinei vectorilor în produsul vectorial.

Tabelul 2.2
Unitățile cîtorva mărimi cinetice și dinamice

Mărimea	Simbolul	Unitatea
Viteza	v	m/s
Accelerația Decelerația	a	m/s²
Viteza unghiulară	ω	rad/s
Accelerația unghiulară	ε	rad/s²
Impulsul	p	N·s
Forța	F	N
Momentul impulsului	J	N·s·m
Momentul forței	$\mathfrak{M}$	N·m

forței poartă denumirea newton (tabela 2.2). Atît forța cît și impulsul sînt vectori și vor fi folosiți ca atare ori de cîte ori va fi nevoie

$$\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v}; \quad \vec{F} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

În fine, mișcarea circulară a unui corp punctiform se descrie cu ajutorul momentelor mărimilor de mai sus, *momentul impulsului* (momentul cinetic) și *momentul forței*,

$$\vec{J} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv \vec{r} \times m\vec{v} \tag{2.8}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\vec{v} \tag{2.9}$$

Aceste produse vectoriale sînt reprezentate în figura 2.5. Mărimile enumerate și cunoscute încă din fizica de liceu vor fi folosite în exprimarea legilor dinamicii în capitolele respective.

2.3. Cinematica şi dinamica solidului

Mişcarea de translaţie a corpului solid se tratează într-un mod asemănător cu mişcarea rectilinie a punctului; pentru mişcarea de rotaţie însă este nevoie de o mărime carecteristică nouă, numită *moment de inerţie* I, definit prin relaţia

$$I \equiv \sum_i m_i \cdot r_i^2 \tag{2.10}$$

unde r_i este distanţa masei componente m_i faţă de axa de rotaţie. Mărimea I arată distribuţia masei corpului, format din masele componente m_i, în jurul axei de rotaţie.

De exemplu, momentul de inerţie al unui inel subţire, de masă M şi rază medie R faţă de axa sa, se poate calcula împărţind inelul în N segmente, fiecare la distanţa R de axă (fig. 2.6). Aplicînd relaţia (2.10) se obţine

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \ldots + m_N R^2 = (m_1 + m_2 + \ldots + m_N) R^2$$

Deoarece suma maselor celor N segmente este egală cu masa M a inelului, relaţia de mai sus devine

$$I = MR^2$$

Fig. 2.6 Împărţirea unui inel în N segmente, pentru calculul momentului de inerţie

În cazul unui corp cu o distribuţie continuă a substanţei în jurul axei de rotaţie, pentru calculul momentului de inerţie corpul trebuie împărţit în multe părţi componente. Cu cît acest număr este mai mare, cu atît mai corect va fi calculat momentul de inerţie. Un exemplu va lămuri mai bine această situaţie. Dacă este necesar să se calculeze momentul de inerţie al unui cilindru faţă de axa sa (fig. 2.7) se împarte masa cilindrului în N părţi componente; masele componente M/N sînt situate faţă de axă la distanţe obţinute prin medierea razelor părţilor componente. Părţile componente au raza maximă multiplu de R/N. Prin urmare împărţirea corpului trebuie să se facă astfel încît momentele de inerţie ale părţilor componente să se deducă cît mai simplu.

Aproximînd $N = 1$, se presupune întreaga masă M la distanţa $R/2$ şi deci

$$I = M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} MR^2 = 0{,}125\ MR^2$$

Alegînd $N = 2$, se formează un cilindru cu rază $R/2$ (raza medie $R/4$) şi o manta cilindrică cuprinsă între razele $R/2$ şi R (raza medie $3R/4$), ceea ce conduce la

$$I = \frac{M}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{3R}{4}\right)^2 = 0{,}312\ MR^2$$

Fig. 2.7. Pentru calculul momentului de inerţie al cilindrului faţă de axa sa

Tabelul 2.3

Valorile momentului de inerție al unui cilindru plin față de axa sa, pentru diferite valori ale numărului N al părților componente

N	I
1	0,125 MR^2
2	0,312 MR^2
4	0,325 MR^2
10	0,333 MR^2
...	
∞	0,500 $MR^2 = \frac{1}{2} MR^2$

Dacă N ia valori din ce în ce mai mari se obțin valorile momentului de inerție din tabela 2.3.

După cum rezultă și din acest exemplu, este necesar să se aleagă un număr foarte mare de mase componente pentru calculul momentului de inerție. Luînd un număr infinit de mare de mase componente, suma din relația (2.10) trebuie înlocuită printr-o integrală. Acest procedeu va fi folosit în capitolul 7 (§ 7.4) la calculul momentului de inerție al cîtorva corpuri.

La descrierea mișcării de rotație a solidului, ca și la mișcarea circulară a punctului (§ 2.2), se folosesc momentul impulsului și momentul forței. Momentul impulsului ia aici o formă deosebită, deoarece această mărime trebuie calculată pentru întregul corp solid. Fiecare particulă a solidului, de masă m_i, situată la distanța r_i de axa de rotație, are viteza liniară v_i tangentă la traiectoria circulară de rază r_i (fig. 2.8), încît momentul impulsului pentru solid este

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{2.11}$$

Vitezele liniare $\vec{v}_i$ sînt legate de viteza unghiulară $\vec{\omega}$ prin relația $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, deoarece $\vec{\omega}$ este același pentru întreg corpul solid. Prin urmare

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

întrucît $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = r_i^2$ (v. Anexa 4). Introducînd momentul de inerție definit prin relația (2.10) rezultă

$$\vec{J} = \vec{\omega} I \tag{2.12}$$

Această mărime va fi folosită în exprimarea legilor dinamicii pentru corpul solid în capitolul 7.

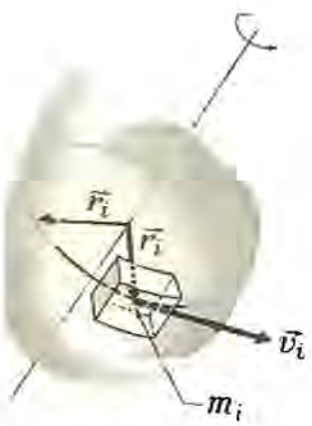


Fig. 2.8. Pentru calculul momentului impulsului al corpului solid

2.4. Calorimetria

În calorimetrie, capitolul fizicii care se ocupă cu măsurarea schimburilor de energie calorică (căldură), apare un concept nou, acela de *temperatură*. Prin definirea operației de egalitate a două temperaturi, acest concept devine o mărime, dar așa cum s-a arătat în § 2.1, nu o mărime măsurabilă, ci o mărime reperabilă.

Noțiunea de temperatură își are originea în senzația de cald și rece pe care omul o capătă prin simțul său tactil. Omul are senzația de cald dacă primește căldură și senzația de rece dacă cedează căldură. Însă, acest schimb de căldură depinde de starea anterioară a organului (de obicei pielea) prin care se percepe senzația de cald și rece. Într-adevăr, aceeași apă caldă „pare" organismului caldă sau rece, după cum în prealabil acel organism a fost în contact cu o apă mai rece sau mai caldă. Un metal care a fost pus în contact cu gheața produce în contact cu organismul o senzație de rece mai puternică decît o bucată de lemn care a fost în contact cu gheața. Pe de altă parte,

organismul uman nu poate aprecia cît este de mare schimbul de căldură. În această situaţie senzaţia de cald şi rece este insuficientă pentru definirea temperaturii.

Pentru a atribui temperaturii un element cantitativ este necesară definirea egalităţii a două temperaturi. *Două corpuri au aceeaşi temperatură dacă puse în contact termic nu schimbă energie între ele.* În această definiţie se precizează contact „termic", pentru a înţelege contactul la care nu se efectuează lucru; de exemplu, la un contact mecanic corpurile se pot freca unul de altul şi astfel se efectuează lucru, care se transformă în căldură. În continuarea definirii egalităţii temperaturilor, trebuie arătat că două corpuri au temperaturi diferite dacă puse în contact termic, există un schimb de energie între ele. Corpul care pierde energie are o temperatură mai mare, iar corpul care primeşte energie are o temperatură mai mică. Schimbul de energie calorică (căldură) are loc pînă la stabilirea *echilibrului termic*, astfel încît la echilibru termic temperatura corpurilor este aceeaşi. Prin aceste consideraţii s-a stabilit numai egalitatea temperaturilor şi constatarea calitativă („mai mare" sau „mai mic"), fără a se putea stabili un procedeu de măsurare a temperaturii.

Procedeul de „reperare" a temperaturii se bazează pe observaţia experimentală că anumite proprietăţi ale corpurilor se modifică cu temperatura. Din acest punct de vedere sînt importante acele proprietăţi care se modifică continuu şi în acelaşi sens cu temperatura. De exemplu, un corp se dilată prin încălzire; prin urmare, lungimea unei coloane de fluid (corpul termometric) poate fi un reper al temperaturii sale. Nu este suficientă numai cunoaşterea temperaturii corpului termometric. Scopul termometriei este determinarea temperaturii altor corpuri cu ajutorul dilatării corpului termometric. Gradînd lungimea în lungul căreia se dilată corpul termometric se obţine o scară arbitrară de temperatură. Cu ajutorul acestei scări arbitrare se repereză temperaturile celorlalte corpuri aducînd termometrul în echilibru termic cu corpul a cărui temperatură trebuie reperată. Prin urmare, *temperatura se poate repera numai în starea de echilibru.*

Deoarece fiecare laborator şi-ar putea alege un corp termometric şi o scară arbitrară de temperatură pentru reperarea temperaturilor, se impun cîteva convenţii pentru folosirea unei singure scări de temperatură. În consecinţă, se definesc *puncte fixe de temperatură,* corespunzătoare unor temperaturi uşor de reprodus (de exemplu, prin fenomenele de schimbare de stare ca topirea sau fierberea), pe care toţi observatorii să le repereze prin aceleaşi numere. Dintre punctele fixe două sînt foarte importante:

1. temperatura θ_1 reperată de un termometru în echilibru termic cu amestecul de gheaţă şi apă,

2. temperatura θ_2 reperată de un termometru în echilibru termic cu vaporii de apă rezultaţi din fierberea apei la presiunea atmosferică normală.

Prin convenţie se stabileşte că $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 - \theta_1 = 100$; astfel se obţine scara de temperatură Celsius, ale cărei puncte sînt: 0°C, pentru temperatura de topire a gheţii şi 100°C, pentru temperatura de fierbere a apei.

Dacă se admite o altă convenţie şi anume, $\theta_1 = 273{,}16$, diferenţa între cele două puncte fixe rămînînd tot 100, se obţine scara de temperatură Kelvin cu punctul de topire al gheţii 273,16 kelvini şi punctul de fierbere al apei 373,16 kelvini. Unitatea de temperatură Kelvin se numeşte „kelvin"* şi nu

* În text se scrie cu literă mică.

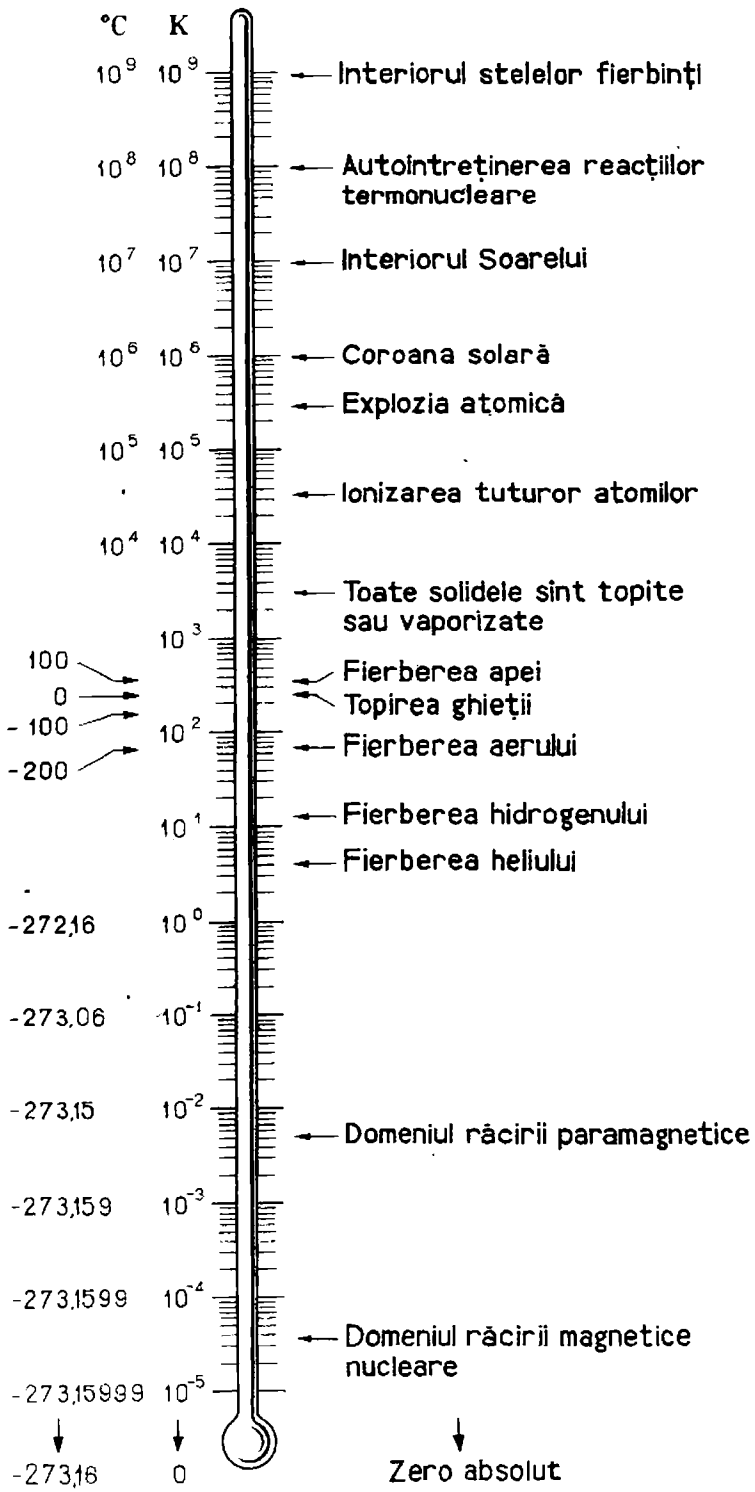


Fig. 2.9. Reprezentarea logaritmică a scărilor de temperatură Celsius și Kelvin, avînd indicate cîteva temperaturi foarte mari și foarte mici, mai reprezentative. Se observă că sub 1 K domeniul temperaturilor tinde a se extinde ca și în acela al temperaturilor mari. La temperaturi foarte mari diferența dintre valorile temperaturilor între cele două scări este neglijabilă. (În scara logaritmică ordinelor de mărime le corespund segmente egale. Subdiviziunile din scara logaritmică reprezintă valorile de 2, 3, 4, 5, ... ori mai mari decît ordinul de mărime scris la baza inferioară a segmentului respectiv. Lungimile acestor subdiviziuni ale scării logaritmice sînt egale cu log 2, log 3, log 4, log 5, ...)

Tabelul 2.4

Valorile elongației, vitezei și accelerației în cazul unei oscilații mecanice, pentru $\varphi = 0$

Timpul	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
ωt:	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y:	A	0	$-A$	0	A
v:	0	$-A\omega$ $(-v_0)$	0	$A\omega$ (v_0)	0
a:	$-A\omega^2$ $(-a_0)$	0	$A\omega^2$ (a_0)	0	$-A\omega^2$ $(-a_0)$

„grad Kelvin", și este o unitate fundamentală. În figura 2.9 sînt reprezentate în scară logaritmică temperaturile Celsius și Kelvin; între ele există relația

$$\theta = T - 273{,}16 \qquad (2.13)$$

unde θ este temperatura Celsius, iar T este temperatura Kelvin.

2.5. Oscilații și unde

Fenomenele oscilatorii se întîlnesc în diferite domenii ale fizicii; mărimea care oscilează poate fi o mărime mecanică (exemplu: oscilația unui pendul), o mărime electrică (exemplu: tensiunea electrică într-un circuit LC) sau temperatura (exemplu: variația diurnă a temperaturii solului). Cel mai simplu fenomen oscilatoriu este *oscilația armonică,* reprezentată prin ecuația

$$y = A \cos (\omega t + \varphi) \qquad (2.14)$$

în care y este elongația, A este amplitudinea, ω este pulsația și φ este faza inițială; expresia pulsației este $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$, unde T este perioada iar ν frecvența.

Elongația variază în timp și pentru descrierea acestei variații sînt necesare derivatele de ordinul întîi și de ordinul doi în raport cu timpul. În cazul unei oscilații mecanice, aceste derivate reprezintă tocmai viteza și, respectiv, accelerația punctului care oscilează

$$v \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega A \sin (\omega t + \varphi) \qquad (2.15)$$

$$a \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \varphi) = -\omega^2 y \qquad (2.16)$$

Cele trei mărimi, elongația, viteza și accelerația, au valorile arătate în tabelul 2.4 și sînt reprezentate grafic în figura 2.10.

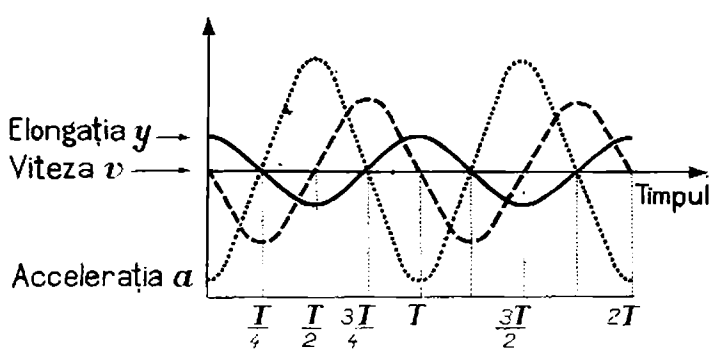


Fig. 2.10. Reprezentarea dependenței de timp a elongației, vitezei și accelerației în cazul unei oscilații mecanice

Oscilațiile locale ale unui mediu elastic (solid, lichid sau gazos) nu pot rămîne izolate în locul în care iau naștere. Datorită forțelor de interacțiune dintre particulele mediului, acestea sînt antrenate și încep să oscileze cu o întîrziere cu atît mai mare, cu cît distanța lor față de locul de perturbare

inițial este mai mare. Ansamblul oscilațiilor diferitelor particule ale mediului se numește *undă*. O oscilație armonică dă naștere unei *unde armonice*: ecuația undei armonice derivată din relația (2.14) este

$$y = A \cos \omega\left(t - \frac{s}{v}\right) \tag{2.17}$$

Această relație exprimă elongația y, la timpul t, într-un punct aflat la distanța s de sursa de oscilații; v este viteza de propagare.

Din punctul de vedere al orientării perturbației față de direcția de propagare se disting *unde longitudinale* și *unde transversale*. La undele longitudinale elongația este fie o mărime scalară, fie o mărime vectorială orientată în direcția de propagare. La undele transversale elongația este o mărime vectorială orientată perpendicular pe direcția de propagare.

Pe cînd oscilația este caracterizată printr-o variație în timp, unda este caracterizată printr-o variație în timp și spațiu. Mărimea caracteristică oscilației este frecvența ν; unda se caracterizează prin frecvența ν și prin lungimea de undă λ. O oscilație de o anumită frecvență dă naștere unor unde de lungimi de undă diferite, în medii diferite, adică pentru viteze de propagare diferite. Pentru un anumit mediu, relația între lungimea de undă λ și frecvența ν este

$$\lambda \cdot \nu = v \tag{2.18}$$

unde v este viteza de propagare în mediul respectiv.

Mărimile care apar în studiul oscilațiilor și undelor sînt de aceeași natură cu acelea studiate în celelalte capitole ale fizicii: în geometrie, în mecanică, în electricitate etc. Astfel, în cazul vibrațiilor mecanice elongația poate fi deplasarea geometrică a unei particule sau a unui corp; în acustică elongația poate fi dilatarea sau suprapresiunea; în cazul radiațiilor electromagnetice elongația este cîmpul electric sau cîmpul magnetic, dar și tensiunea electrică sau curentul electric. În afara acestor mărimi mai intervin și celelalte mărimi caracteristice oscilațiilor și undelor: frecvența, pulsația, lungimea de undă etc., care pot fi definite cu ajutorul mărimilor stabilite în celelalte capitole ale fizicii. Prin urmare, în studiul oscilațiilor și undelor nu este necesară vreo mărime fundamentală nouă.

2.6. **Electricitatea și magnetismul**

Descrierea fenomenelor electrice și magnetice ridică dificultăți dintre cele mai mari, datorită numeroaselor legi care sînt necesare pentru explicarea acestor fenomene. În acest paragraf nu vor fi tratate legile electricității și magnetismului, ci se menționează numai că numărul mare de mărimi noi, specifice acestui domeniu, ridică problema alegerii mărimilor fundamentale. În urmă cu cîteva decenii acest capitol al fizicii era prezentat, chiar la nivelul fizicii de liceu, cu cîteva sisteme de unități fundamentale, deci cu mai multe soluții în ceea ce privește alegerea mărimilor fundamentale. Această situație persistă încă și astăzi la nivele superioare de studiu al fizicii și în unele cazuri, de exemplu în fizica teoretică, folosirea mai multor sisteme de unități este chiar inevitabilă.

Trebuie precizat că în literatura modernă există tendinţa ca la nivelul postliceal să se folosească un singur sistem de unităţi; aceasta înseamnă alegerea *unei singure mărimi fundamentale* pentru electricitate şi magnetism, aşa cum se procedează şi în fizica de liceu.

Studiul electricităţii se începe în fizica de liceu cu legea lui Coulomb, care exprimă forţa dintre sarcinile q şi q', situate la distanţa d

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon d^2} \tag{2.19}$$

unde ε este permitivitatea mediului în care se găsesc cele două sarcini electrice. Prin expresia matematică a legii lui Coulomb se introduc două mărimi noi: sarcina q şi permitivitatea ε; distanţa d şi forţa F fiind definite din capitolele anterioare ale fizicii. Ca urmare, este necesară alegerea uneia din cele două mărimi noi, ca mărime fundamentală. Se poate alege, în mod convenţional, *sarcina electrică* ca mărime fundamentală, ceea ce înseamnă că se alege arbitrar unitatea de măsurare a acestei mărimi. Alegerea sarcinii electrice ca mărime fundamentală este în concordanţă cu un aspect particular al acestei mărimi şi anume, faptul că sarcina electrică este o mărime discontinuă. Orice sarcină electrică este un multiplu al sarcinii electrice elementare e. Cele două particule principale care intră în constituţia substanţei, *electronul* şi *protonul*, au sarcinile electrice $-e$ şi, respectiv, $+e$. În consecinţă unitatea de sarcină electrică numită coulomb (simbol C) se defineşte ca un anumit număr de sarcini electrice elementare, de exemplu un anumit număr de electroni. Acest număr poate fi ales în mod convenţional, deoarece este vorba de o unitate fundamentală:

$$1\ \mathrm{C} = 6{,}242 \cdot 10^{18}\ \mathrm{e}$$

Din punct de vedere metrologic amperul este mai uşor de determinat decît coulombul. Definind amperul ca unitate fundamentală, prin intermediul forţei lui Laplace, coulombul rezultă ca unitate derivată, $1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A} \times 1\ \mathrm{s}$. Dar în această etapă de studiu al fizicii, este mai comodă descrierea fenomenelor electrice cu ajutorul sarcinii electrice ca mărime fundamentală şi deci cu coulombul ca unitate fundamentală. Coulombul este o unitate SI şi deci folosirea sa ca unitate fundamentală nu este în contradicţie cu utilizarea acestui sistem de unităţi.

Toate celelalte mărimi electrice pot fi definite cu ajutorul a patru mărimi fundamentale: lungimea, timpul, masa şi sarcina electrică. Prin urmare, sistemul de unităţi propriu electricităţii este cel bazat pe unităţile fundamentale: metru, secundă, kilogram şi coulomb. Este important de subliniat că *magnetismul nu are nevoie de o mărime fundamentală nouă*. Magnetismul este un aspect al mişcării sarcinilor electrice şi deci nu necesită mărimi specifice. Nu există în natură nici un corespondent magnetic al sarcinii electrice, deoarece la un magnet nu se pot separa polii, oricît de mici ar fi particulele de divizare a magnetului. Prin urmare, fenomenele magnetice sînt descrise cu aceleaşi mărimi fundamentale cu care sînt descrise fenomenele electrice, iar sistemul de unităţi fundamentale este acelaşi atît în electricitate cît şi în magnetism.

La începutul acestui paragraf s-a folosit ca punct de plecare în studiul electricităţii legea lui Coulomb, care exprimă forţa dintre două sarcini electrice. Aşa se procedează în fizica de liceu şi chiar în unele cărţi de nivel supe-

rior. Dintr-un punct de vedere mai modern, în descrierea fenomenelor electrice nu se mai pornește de la legea lui Coulomb, ci de la o altă lege, numită legea lui Gauss, care exprimă fluxul cîmpului electric produs de o sarcină electrică. În acest caz, expresia (2.19) se deduce matematic din legea lui Gauss și devine astfel teoremă: teorema lui Coulomb. Din acest punct de vedere modern se va prezenta electricitatea în cartea de față.

2.7. Constanta lui Avogadro

Moleculele care intră în compoziția substanței sînt formate din atomi. Cel mai ușor atom este atomul de hidrogen; ceilalți atomi sînt mai masivi *, masele lor fiind apropiate de multiplii întregi ai masei atomului de hidrogen. Pentru măsurarea maselor atomice nu se folosește masa atomului de hidrogen, ci o valoare foarte apropiată de aceasta

$$u = 1{,}660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

numită „unitatea atomică de masă". În ceea ce privește alegerea acestei valori pentru unitatea u, trebuie precizat că în procedeul de măsurare a masei atomilor, atomul de referință nu este hidrogenul, ci carbonul. De aceea, unitatea atomică de masă reprezintă a 12-a parte din masa atomului nuclidului ^{12}C.

Masa atomică m a unei specii atomice (element chimic) este media ponderată a masei izotopilor respectivi; ea se notează cu m și se exprimă în unități u. Exemple:

hidrogenul	H	$m =$	1,0080	oxigenul	O	$m =$	15,999
heliul	He	$m =$	4,0026	clorul	Cl	$m =$	35,453

Masa moleculară M a unei specii moleculare (substanță chimică), exprimată de asemenea în unități u, se obține prin însumarea maselor atomice m_i ale atomilor componenți

$$M = \sum_i m_i$$

De exemplu:

hidrogenul	H_2	$M =$	2,0160	apa	H_2O	$M =$	18,015
oxigenul	O_2	$M =$	31,998	acidul clorhidric	HCl	$M =$	36,461

Ca urmare, atît masa unui atom cît și masa unei molecule se exprimă cu ajutorul unității atomice de masă

$$\begin{aligned} \text{masa unui atom} &= m \cdot u \\ \text{masa unei molecule} &= M \cdot u \end{aligned}$$

Mărimile „*masa atomică*" și „*masa moleculară*" sînt numere pe cînd „*masa unui atom*", respectiv, „*masa unei molecule*" sînt mărimi exprimabile în unitatea de masă: kilogramul.

* Prin „masiv" se înțelege „masă mai mare".

Pentru formarea unei molecule dintr-o substanţă trebuie să reacţioneze un anumit număr de atomi; de exemplu, pentru formarea acidului clorhidric (HCl) trebuie ca un anumit număr de atomi de hidrogen să reacţioneze cu acelaşi număr de atomi de clor. Întrucît pentru formarea substanţelor este mai important numărul de particule (atomi sau molecule) decît masa lor se foloseşte conceptul de kilomol.

Un kilomol (simbol kmol) este cantitatea de substanţă care conţine un anumit număr de atomi sau de molecule şi anume un număr egal cu constanta lui Avogadro. Constanta lui Avogadro $\mathcal{N}$ este prin definiţie inversul unităţii atomice de masă

$$\mathcal{N} \equiv \frac{1}{\mathrm{u}} = 6{,}023 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol}^{-1}$$

adică reprezintă numărul de unităţi u dintr-un kilogram.

Cu alte cuvinte, constanta lui Avogadro reprezintă numărul de atomi cu masa egală cu u, conţinuţi într-un kilogram. În unele cărţi constanta se scrie $6{,}023 \cdot 10^{26}$ molecule/kmol, dar trebuie precizat că această constantă nu se referă numai la numărul de molecule, ci şi la numărul de atomi. Pentru o moleculă monoatomică, de exemplu heliul, se poate scrie $6{,}023 \cdot 10^{26}$ atomi/kmol. Dacă interesează numărul de atomi de un anumit fel dintr-un kilomol trebuie să se cunoască formula chimică a moleculei care conţine specia atomică respectivă. De exemplu, numărul de atomi de hidrogen este

în HCl	$6{,}023 \cdot 10^{26}$ atomi/kmol
în H_2O	$2 \times 6{,}023 \cdot 10^{26}$ atomi/kmol

Un kilomol din orice substanţă are acelaşi număr de molecule, dar masa acestei cantităţi de substanţă, adică *masa unui kilomol* (notată m_{kmol}) este diferită de la o substanţă la alta şi are valoarea dată de produsul între constanta lui Avogadro şi masa unei molecule,

$$m_{\mathrm{kmol}} = \mathcal{N} \cdot M \cdot \mathrm{u} = \frac{1}{\mathrm{u}} M \cdot \mathrm{u} = M$$

adică masa unui kilomol este egală cu masa moleculară în kilograme. Astfel, un kilomol de apă are 18,015 kg, iar un kilomol de acid clorhidric are 36,461 kg, dar 18,015 kg de apă şi 36,461 kg de acid clorhidric conţin acelaşi număr de molecule. Pentru formarea a 36,461 kg acid clorhidric este necesar 1,008 kg hidrogen şi 35,453 kg clor, deoarece pentru formarea unui kilomol de acid clorhidric trebuie un kilomol de hidrogen atomar şi un kilomol de clor atomar. Dacă se folosesc un kilomol hidrogen molecular şi un kilomol clor molecular se obţin doi kilomoli de acid clorhidric, deoarece moleculele de hidrogen şi clor sînt biatomice şi reacţia chimică respectivă este

$$H_2 + \mathrm{Cl}_2 = 2\mathrm{HCl}$$

O mărime importantă în studiul gazelor este numărul de kilomoli ν definit prin raportul

$$\nu = \text{masa de substanţă/masa unui kilomol}$$

Numărul de kilomoli este un număr pur, deoarece atît masa de substanţă cît şi masa unui kilomol se exprimă în kilograme.

Capitolul 3

Invarianța galileiană

3.1. Relativitatea mișcării

Orice mișcare pe care o producem sau la care participăm se execută pe planeta Pămînt aflată în mișcare în jurul Soarelui. Pămîntul, în afara mișcării anuale pe orbita sa, efectuată cu viteza de 30 000 m/s, în medie, mai are o mișcare de rotație zilnică, datorită căreia viteza unui punct de la suprafața sa variază de la 500 m/s, la ecuator, pînă la zero, la poli. În fine, Soarele însuși se mișcă față de stelele vecine din Galaxia noastră, cu viteza de circa 20 000 m/s, în timp ce Galaxia se mișcă față de alte galaxii din Univers!

După cum se observă nu se poate vorbi despre viteza absolută a unui corp. În mișcarea unui corp se măsoară *viteza relativă* față de un alt corp sau, mai precis, față de un anumit *sistem de referință*. Cînd nu se menționează corpul sau sistemul de referință se subînțelege că ne referim la Pămînt.

Se întîlnesc *mișcări relative* mai mult sau mai puțin complicate. Majoritatea mecanismelor din mașinile moderne sau deplasarea navelor cosmice oferă asemenea exemple. Astfel, o navă lansată de pe Pămînt poate fi caracterizată, la început, printr-o viteză relativă față de Pămînt, importantă pentru evadarea din cîmpul gravitațional al planetei noastre, apoi printr-o viteză relativă față de Soare și în fine, printr-o viteză relativă față de o altă planetă, de exemplu, Venus sau Marte, viteză esențială pentru efectuarea programului de zbor. Dacă programul prevede ajungerea pe altă planetă este necesar să se poată prevedea viteza relativă a navei față de planeta gazdă, viteză necesară pentru a depune în bune condițiuni pe suprafața acesteia aparatura de investigație sau cabina cu echipajul navei.

Conform considerațiilor făcute rezultă că un corp are la un moment dat mai multe viteze relative, fiecare din acestea raportată la un anumit sistem de referință. Ceea ce interesează în cazul unei mișcări este determinarea vitezei relative a unui corp *față de un sistem de referință*, cînd se cunoaște viteza relativă a sa față de un alt sistem de referință. Pentru simplificarea raţio-

namentelor se va folosi un *sistem fix* și un *sistem mobil*, deși se va arăta că niciodată nu se poate defini un sistem de referință fix. Această simplificare nu reduce cu nimic exactitatea concluziilor la care se va ajunge. Sistemul de referință fix poate fi, după caz, legat de suprafața Pămîntului, legat de centrul Pămîntului sau solidar cu centrul Soarelui.

În continuare se va analiza, mai întîi, mișcarea rectilinie relativă, uniformă și accelerată, și apoi mișcarea circulară relativă.

3.2. Transformarea ecuației mișcării

Se presupune un corp punctiform M situat în sistemul $O'x'y'z'$ mobil în raport cu sistemul $Oxyz$ presupus fix. Viteza de deplasare v a sistemului O' față de sistemul O (viteza de transport) este constantă în mărime și direcție. În mișcarea sa, axa $O'x'$ coincide continuu cu axa Ox, iar la originea timpului axele de coordonate ale celor două sisteme au coincis între ele (figura 3.1). Deoarece mișcarea sistemului O' este rectilinie și uniformă, rezultă că ulterior după timpul t distanța OO' între originile celor două sisteme va fi

$$OO' = v \cdot t$$

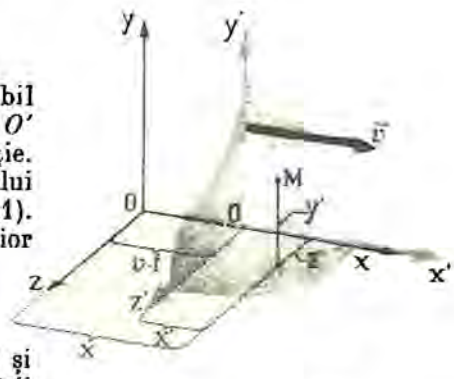


Fig. 3.1. Sistemul $O'x'y'z'$ în mișcare rectilinie și uniformă față de sistemul $Oxyz$, astfel încît axele $O'x'$ și Ox coincid.

Fie x', y', z' coordonatele punctului M, în sistemul O' la timpul t' și x, y, z coordonatele sale, la timpul t, în sistemul O. Datorită alegerii mișcării sistemului O' în lungul axei Ox, relațiile între coordonatele punctului M în cele două sisteme se scriu

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

la care se adaugă relația

$$t' = t$$

adică *timpul este o mărime absolută*, nefiind influențată de mișcarea de translație rectilinie și uniformă a sistemului de referință, oricum s-ar alege sensul mișcării.

Cele patru relații de mai sus sînt *formulele de transformare ale lui Galilei* numite pe scurt *transformările lui Galilei*, care permit trecerea de la coordonatele x, y, z, măsurate la timpul t în sistemul O, la coordonatele x', y', z', măsurate simultan, la timpul t', în sistemul O'.

Dacă punctul M este în mișcare rectilinie și uniformă, față de axa $O'x'$, un observator din sistemul O' găsește viteza relativă w a punctului M față de sistemul O'. Ecuația mișcării în sistemul O' va fi

$$x' = w \cdot t' \quad (3.2)$$

Ne propunem să găsim ecuația mișcării pentru sistemul O folosind formulele de transformare ale lui Galilei date de relațiile (3.1). Introducînd în relația (3.2) expresia lui x', dată de relația (3.1) se obține

$$x - vt = w \cdot t'$$

dar, deoarece $t' = t$, rezultă

$$x = (v + w)t$$

Definind $V \equiv v + w$, se ajunge la următoarea ecuație a mișcării în sistemul O

$$x = Vt \tag{3.3}$$

Prin interpretarea acestei relații reiese semnificația mărimii V: ea reprezintă viteza punctului M față de sistemul O. În limbajul celor care presupun sistemul O fix, V ar fi *viteza absolută* a punctului M.

Se remarcă faptul că *ecuația mișcării* dată de relațiile (3.2) și (3.3) *are aceeași formă* în cele două sisteme de referință, cu condiția ca mișcarea sistemului O' să fie o mișcare rectilinie și uniformă. Este adevărat că în cele două expresii viteza are valori diferite dar forma ecuației este aceeași. Constatarea că viteza nu este un *invariant* este deosebit de semnificativă și va fi reluată în capitolul următor.

Relația între viteze care se poate generaliza și scrie vectorial

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{w} \tag{3.4}$$

se numește *teorema de compunere a vitezelor*. Această teoremă este foarte importantă, ea oferind posibilitatea să se urmărească dacă ecuația mișcării se modifică în cazul altor tipuri de mișcări. Astfel dacă mișcarea punctului M, sau mișcarea sistemului O', sau amîndouă, sînt accelerate, atunci derivînd relația (3.4) în raport cu timpul,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}' \tag{3.5}$$

se obține expresia accelerației $\vec{a}$ în sistemul O ($\vec{a} \equiv \mathrm{d}\vec{V}/\mathrm{d}t$), în funcție de accelerația $\vec{a}_t$ a sistemului de referință ($\vec{a}_t \equiv \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$, numită accelerația de transport) și de accelerația $\vec{a}'$ a punctului M în sistemul $O'(\vec{a}' \equiv \mathrm{d}\vec{w}/\mathrm{d}t)$. În cazul particular în care sistemul de referință O' se mișcă rectiliniu și uniform, $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = 0$ și deci

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Dacă accelerațiile sînt identice ecuațiile mișcării sînt identice; prin urmare, într-un sistem de referință care este în mișcare rectilinie și uniformă ecuația mișcării rămîne aceeași, în raport cu sistemul de referință considerat fix.

3.3. **Expresia vitezei relative**

Pentru discutarea expresiei vitezei relative cîteva cazuri particulare sînt mai interesante. Primul se referă la *deplasarea unui corp într-un mediu în mișcare*, de exemplu navă pe apă curgătoare sau avion în vînt. Mediul în mișcare (sistemul de referință mobil) se deplasează față de sistemul de referință fix — suprafața Pămîntului — cu viteza de transport $\vec{v}$, iar corpul are viteza relativă $\vec{w}$ față de mediu. Pentru cazul în care *vitezele* $\vec{v}$ și $\vec{w}$ *sînt coliniare*,

apar situațiile redate schematic în figura 3.2. Viteza $\vec{V}$ a corpului față de sistemul presupus fix, în exemplul de mai sus suprafața Pământului, are expresiile algebrice date în figura 3.2. În cazul unei nave care se mișcă pe o apă curgătoare, dacă $\vec{w}$ este de sens invers cu $\vec{v}$, este necesar ca $|\vec{w}| > |\vec{v}|$ pentru ca nava să urce în amonte ($|\vec{V}|$ este negativ). În asemenea cazuri, nava este caracterizată prin viteza relativă $\vec{w}$, față de mediul în care se mișcă, impusă de puterea motorului respectiv. Pentru calculul timpului de zbor al unui avion sau de navigație a unei nave între două puncte situate la distanța D, distanță măsurată pe sol, este necesară viteza V față de sistemul presupus fix și atunci $t = D/V$.

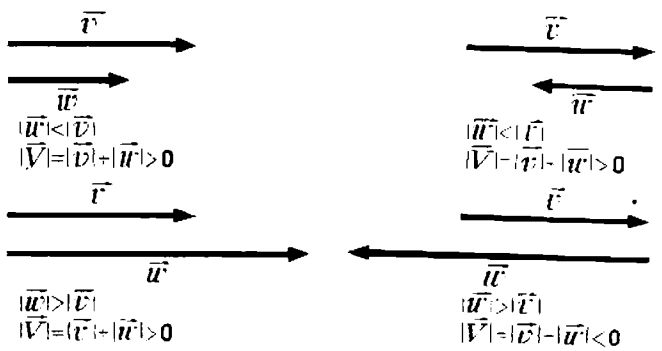


Fig. 3.2. Cele 4 cazuri pentru viteza $\vec{V} = \vec{v} + \vec{w}$, în funcție de mărimea și sensul vitezei relative $\vec{w}$, față de viteza $\vec{v}$ a mediului. Semnul modulului $|\vec{V}|$ arată sensul vectorului $\vec{V}$ față de acela al vectorului $\vec{v}$

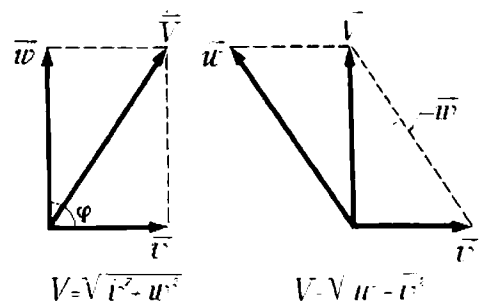


Fig. 3.3. La traversarea unui rîu pot apare două situații: viteza relativă $\vec{w}$ este perpendiculară pe viteza rîului $\vec{v}$ sau viteza față de sol $\vec{V}$ este perpendiculară pe viteza rîului $\vec{v}$

În cazul mișcării unui corp într-un mediu în mișcare, mai interesantă este situația în care viteza relativă $\vec{w}$ *nu este coliniară cu viteza de transport* $\vec{v}$. Dacă cele două viteze, $\vec{v}$ și $\vec{w}$, formează unghiul φ, atunci viteza $\vec{V}$ față de sistemul fix, în modul, este redată de cunoscuta relație

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\varphi}$$

Această relație scalară corespunde ecuației vectoriale $\vec{V} = \vec{v} + \vec{w}$. La traversarea unui rîu, o barcă poate menține $\varphi = \frac{\pi}{2}$, adică $\vec{w} \perp \vec{v}$, și deci

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{v^2 + w^2} \qquad (3.6)$$

cum se vede în figura 3.3. Dar dacă barca trebuie să ajungă pe malul celălalt, exact pe perpendiculara la viteza de transport $\vec{v}$, adică $\vec{V}$ să rămînă perpendicular pe viteza rîului $\vec{v}$, atunci viteza relativă $\vec{w}$ trebuie să aibă o

anumită orientare, astfel încît cu ajutorul figurii 3.3 se obține expresia lui $|\vec{V}|$

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{w^2 - v^2} \tag{3.7}$$

Cazul următor, care se va analiza este deplasarea a două corpuri care se mișcă cu vitezele $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ față de sol; solul este sistemul de referință fix. Pentru a găsi viteza relativă $\vec{w}$ a unui corp față de celălalt, se va atașa primului corp sistemul de referință mobil $O'x'y'z'$, folosit în paragraful anterior, astfel că viteza de transport va fi $\vec{v} = \vec{V}_1$ (fig. 3.4).

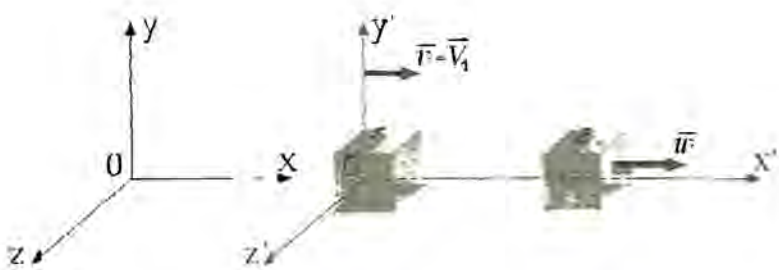


Fig. 3.4. Pentru calculul vitezei relative a unui mobil față de altul se atașează sistemul $O'x'y'z'$ unuia din cele două mobile

În sistemul mobil, al doilea corp se mișcă cu viteza relativă $\vec{w}$ și deci viteza sa față de sol devine

$$\vec{V}_2 = \vec{v} + \vec{w}$$

Din aceste două relații rezultă

$$\vec{w} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \tag{3.8}$$

Să discutăm această relație, în primul rînd, pentru cazul în care cele două corpuri se deplasează în același sens, adică vectorii $\vec{V}_2$ și $\vec{V}_1$ au același sens. Expresia algebrică $w = V_2 - V_1$ arată că există două cazuri

a) $V_2 > V_1, \quad w > 0$

atunci corpurile se depărtează și după timpul t distanța dintre ele va fi $D = w \cdot t$; și

b) $V_2 < V_1, \quad w < 0, \quad |w| = V_1 - V_2$

atunci corpurile se apropie unul de altul. În această ultimă situație, dacă ele se aflau inițial la distanța D, se vor întîlni (ciocni) după timpul

$$t = \frac{D}{w} = \frac{D}{V_1 - V_2}$$

În al doilea rînd, să discutăm relația vitezei relative w pentru cazul în care cele două corpuri se deplasează unul spre celălalt, adică vectorii $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ au sensuri diferite. Alegîndu-l pe V_2 negativ, expresia algebrică a vitezei relative devine

$$|\vec{w}| = w = -V_2 - V_1 = -(V_1 + V_2)$$

În acest caz, independent de mărimea vitezelor V_1 și V_2, w este negativ, adică cele două corpuri se apropie; la ciocnire, viteza relativă w reprezintă viteza de ciocnire. Dacă cele două corpuri erau inițial la distanța D, unul față de celălalt, atunci timpul de întîlnire va fi

$$t = \frac{D}{w} = \frac{D}{V_1 + V_2}$$

În locul relației vectoriale (3.8) se poate folosi, în cazul în care vitezele sînt paralele, relația algebrică

$$w = V_2 \pm V_1 \tag{3.9}$$

cu convenția de semn

semnul +, vitezele au sensuri contrarii
semnul —, vitezele au același sens.

Șaradă *

Doi aviatori B și C trebuiau să zboare din București, dus și întors, primul la Buzău și al doilea la Călărași, cele două distanțe fiind egale. Vîntul bătea intens de la București spre Buzău cu 100 km pe oră; direcția vîntului fiind perpendiculară pe traiectoria București—Călărași. Înainte de plecare, B a pus rămășag cu C că se va întoarce înaintea lui. Argumentul lui B a fost următorul: va fi mai dificil la întors, cu vîntul din față, dar la dus va cîștiga timp, deoarece vîntul îi va sufla din spate. Cu alte cuvinte, după B, efectul vîntului s-ar fi anulat pentru el, pe cînd pentru C vîntul îi va sufla dintr-o parte și la dus și la întors.

Aviatorii au zburat, fiecare a staționat la țintă aceeași durată și s-a întors C înaintea lui B. Pierzînd rămășagul, B l-a întrebat pe C cum explică acest rezultat. C i-a spus că pe distanța Buzău—București, efectul de „frînare" al vîntului acționează un timp mai lung la întoarcere, pe cînd efectul de „accelerare", la dus, acționează un timp mai scurt. Cele două timpuri pentru Buzău și Călărași se pot calcula așa cum se arată în continuare.

Aplicație

Într-un mediu în mișcare cu viteza de transport $\vec{v}$, un corp trebuie să parcurgă dus și întors aceeași distanță D, o dată paralel cu direcția lui $\vec{v}$ și altădată perpendicular pe vectorul $\vec{v}$. Dacă viteza relativă a corpului față de mediu este $\vec{w}$ se cer: raportul dintre timpul

* după G. Gamov, M. Stern: Enigme matematice, Ed. științifică Buc. 1961

de parcurgere longitudinal t_l și timpul de parcurgere transversal t_t, ambele timpuri pentru dus și întors, și dependența acestui raport de viteza v. Această situație se întîlnește fie în cazul deplasării unei bărci pe o apă curgătoare, fie în cazul zborului unui avion pe un vînt puternic, cînd punctele de destinație B și C se găsesc față de punctul de plecare A situate ca în figura 3.5, unde v este viteza apei curgătoare sau a vîntului.

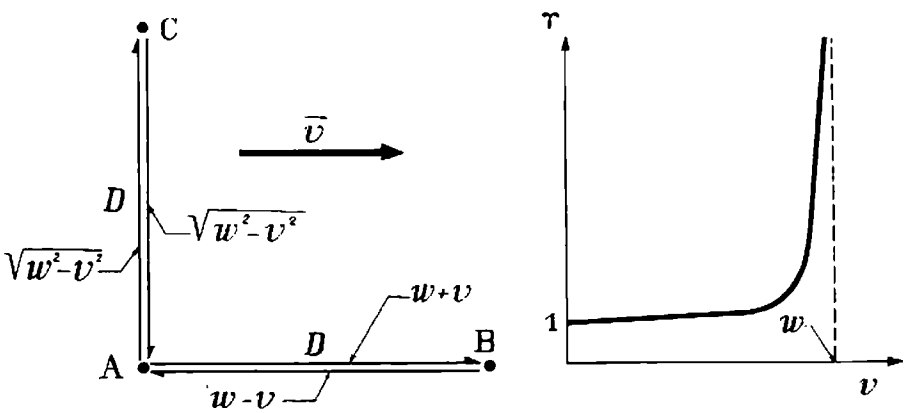


Fig. 3.5. Deplasarea unui mobil pe 2 direcții perpendiculare, într-un mediu în mișcare cu viteza de transport $\vec{v}$ și raportul $\gamma \equiv t_l/t_t$ al timpurilor respective în funcție de viteza $v = |\vec{v}|$ a mediului

Cu valorile vitezelor față de sol, indicate în figura 3.5, timpul de parcurgere longitudinal se exprimă astfel

$$t_l = \frac{D}{w+v} + \frac{D}{w-v} = \frac{2Dw}{w^2-v^2}$$

unde s-a folosit pentru întoarcere viteza $V = w - v$, deoarece este necesar ca $w > v$, altfel corpul nu s-ar mai putea întoarce din B în A.

Timpul de parcurgere transversal se determină folosind relația (3.7) pentru viteza față de sol, care descrie un caz similar de mișcare,

$$t_t = \frac{D}{\sqrt{w^2-v^2}} + \frac{D}{\sqrt{w^2-v^2}} = \frac{2D}{\sqrt{w^2-v^2}}$$

Raportul celor două timpuri, notat cu γ este

$$\gamma \equiv \frac{t_l}{t_t} = \frac{w}{w^2-v^2} \cdot \sqrt{w^2-v^2} = \frac{w}{\sqrt{w^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{w^2}}}$$

Se observă că raportul γ nu depinde de distanța D. Deoarece $v < w$, altfel corpul nu s-ar putea întoarce din B în A, rezultă $\gamma > 1$ sau $t_l > t_t$. Altfel spus, pentru ca factorul γ să aibă sens, trebuie ca expresia de sub radical să fie pozitivă, ceea ce conduce la $w^2 > v^2$ sau $|w| > |v|$. Cînd $v = 0$, se obține $\gamma = 1$ și deci $t_l = t_t$, ceea ce era de așteptat.

Pentru un anumit vehicul, w este o caracteristică impusă de puterea motorului. În cazul navigației într-un mediu în mișcare interesează variația raportului γ cu viteza v, care poate varia. Funcția $\gamma(v)$ este arătată în figura 3.5, în dreapta; dacă $v \to w$ atunci $\gamma \to \infty$.

Ca exemplu, un avion cu $w = 200$ km/h ar trebui să se deplaseze din București la Buzău și la Călărași, cînd vîntul bate de la București spre Buzău, cu $v = 100$ km/h. Cele două direcții

de zbor sînt aproape perpendiculare între ele, iar distanţele la cele 2 oraşe practic egale cu 100 km. Dacă vîntul nu ar bate $t_0 = \frac{2D}{w}$ şi $t_1 = t_2 = 1$ h. În prezenţa vîntului calculul dă $t_1 = 1{,}33$ h şi $t_2 = 1{,}17$ h. Dacă viteza vîntului ar creşte, raportul $\gamma = t_1/t_2$ ar creşte, iar dacă vîntul ar deveni excesiv de puternic, raportul acesta creşte considerabil din cauza creşterii timpului t_1. Este important de subliniat că atît t_1 cît şi t_2 sînt mai mari decît t_0. Mărimea γ se numeşte factorul lui Lorentz.

3.4. Mişcarea aparentă diurnă

Înainte de a trece la mişcarea circulară relativă este interesant cazul mişcării aparente diurne pe baza căreia se definesc: ziua siderală şi ziua solară, noţiuni foarte importante în măsurarea timpului. Pămîntul se mişcă în sens direct pe o elipsă în jurul Soarelui, care ocupă unul din focare (figura 3.6); aceasta-i mişcarea de revoluţie. Orbită eliptică se numeşte, de obicei, *ecliptică*, deoarece eclipsele de Lună au loc numai atunci cînd Luna se găseşte în planul eclipticii. Axa Pămîntului este înclinată faţă de ecliptică cu unghiul de 23°27′; acest unghi poartă numele de oblicitatea eclipticei.

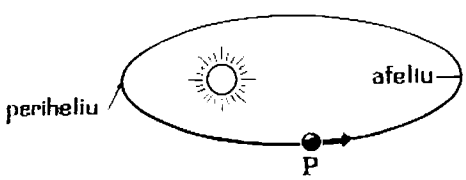


Fig. 3.6. Mişcarea Pămîntului în jurul Soarelui, pe o elipsă cu Soarele în unul din focare

Pentru stabilirea noţiunilor de timp la care s-au făcut referiri mai înainte, este mai comod să se considere mişcarea aparentă a Soarelui şi a stelelor în jurul Pămîntului. În figura 3.7 este reprezentată sfera cerească cu Pămîntul în centru, BB' fiind *axa terestră*. Linia de intersecţie a planului ecuatorial cu ecliptica se numeşte *linia echinocţiilor*; punctele γ şi γ' unde Soarele întîlneşte ecuatorul EE' trecînd, respectiv din emisferul austral în cel boreal şi invers, se numesc echinoxul de primăvară şi echinoxul de toamnă. Cînd Soarele se găseşte în unul din aceste puncte ziua este egală cu noaptea în toate punctele Pămîntului. Echinoxul de primăvară, γ, se mai numeşte *punctul vernal*; planul $E\gamma E'$ se numeşte *ecuatorial*. Ecliptica şi ecuatorialul se numesc plane fundamentale.

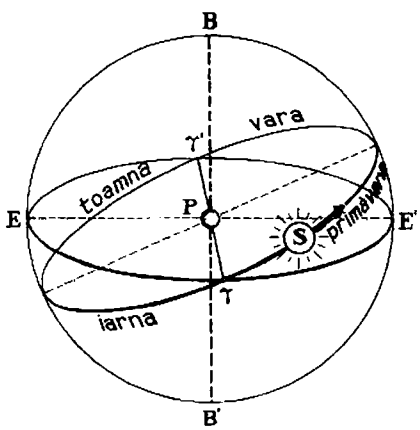


Fig. 3.7. Reprezentarea sferei cereşti cu Pămîntul în centru. S-a neglijat excentricitatea orbitei aparente a Soarelui

Pe lîngă mişcarea de revoluţie pămîntul are şi o mişcare de rotaţie în jurul axei proprii cu perioada

$$T_r = 86\,164 \text{ s} = 23{,}934 \text{ h}$$

perioadă care se măsoară faţă de un *sistem exterior sistemului solar*, de exemplu faţă de un sistem solidar cu 3 stele fixe. Această perioadă reprezintă intervalul de timp care se scurge între două treceri consecutive ale unei anumite stele la acelaşi meridian; ea este folosită ca definiţie a unităţii de timp numită „*ziua siderală*". Ziua siderală este unitatea folosită real în observatoarele astronomice pentru măsurarea timpului. Însă omul nu reglează acti-

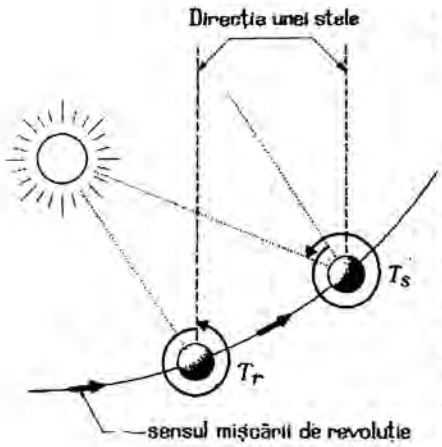


Fig. 3.8. Mișcarea de rotație a Pământului în jurul axei sale și mișcarea de revoluție în jurul Soarelui, ambele în sensul direct, impun $T_s > T_r$

vitatea sa zilnică după mișcarea aparentă a stelelor ci după *mișcarea aparentă a Soarelui.* Perioada de rotație aparentă a Soarelui în jurul Pământului este

$$T_s = 86\,400 \text{ s} = 24{,}000 \text{ h}$$

Se înțelege că perioada T_s este mai mare decît T_r, dacă se consideră ambele mișcări ale Pământului, cea de revoluție și cea de rotație, avînd sensurile directe așa cum se vede în figura 3.8. Perioada T_s reprezintă prin urmare intervalul de timp care se scurge între două treceri consecutive ale Soarelui la meridianul locului; ea este folosită ca definiție a unității de timp numită „*ziua solară*".

De fapt este vorba de o zi solară mijlocie, deoarece mișcarea aparentă a Soarelui nu este uniformă din două motive:

1. Soarele descriind ecliptica după legea ariilor, viteza sa unghiulară nu este constantă; ea descrește de la perigeu (ianuarie) la apogeu (iulie) și invers. De aici rezultă faptul că zilele solare sînt mai mari în ianuarie decît în iulie.

2. Datorită oblicității eclipticii, arce egale ale acesteia se vor proiecta pe ecuator după arce neegale și pentru acest motiv zilele solare vor crește de la un echinox la solstițiul următor și invers.

Deplasarea planelor fundamentale. Atît Soarele, din cauza masei enorme, cît și Luna care orbitează la o distanță mică în jurul Pământului, exercită o puternică influență asupra mișcării Pământului. Pe de altă parte, mișcarea Pământului mai este influențată și de mișcarea celorlalte planete din sistemul solar, precum și de perturbațiile cauzate sistemului solar de mișcarea altor aștri din Galaxie. Dacă Pământul ar avea o formă sferică, atunci rezultanta tuturor forțelor de atracție, care se exercită asupra Pământului, ar trece prin centrul său și astfel axa de rotație ar rămîne mereu paralelă cu ea însăși. Deoarece Pământul are o formă elipsoidală, direcția axei polilor în spațiu este modificată în mod continuu de acțiunea corpurilor cerești înconjurătoare, în special de acțiunea Soarelui și a Lunii.

Ca urmare a acestor influențe, planele fundamentale, Ecliptica și Ecuatorialul, se deplasează în timp și dau naștere la alte două mișcări ale Pământului: *mișcarea de precesie* și *mișcarea de nutație.*

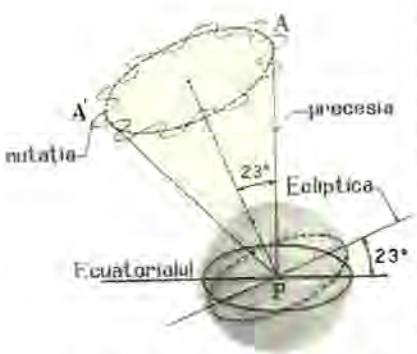


Fig. 3.9. Mișcarea de precesie și mișcarea de nutație a axei Pământului

În mișcarea de precesie, axa Pământului descrie, în sens retrograd (sens trigonometric indirect), o suprafață care este foarte apropiată de aceea a unui con de revoluție a cărui axă este perpendiculară pe Ecliptică și al cărui semiunghi la vîrf este de aproximativ 23° (figura 3.9). Pentru a parcurge în întregime acest con, axa Pământului are nevoie de aproximativ 26 000 ani, aceasta înseamnă că la capătul perioadei de 26 000 ani, punctul γ parcurge în sens retrograd cele 360° ale ecuatorului ceresc. În această mișcare, axa terestră antrenează ecuatorul, astfel că Soarele revine de fiecare dată cu 50,26″ mai devreme la ecuatorul sferei cerești.

Stelele formează un sistem invariabil pe sfera cerească. În virtutea mișcării de precesie, polul A se deplasează încet printre stele, descriind pe sfera cerească cercul AA'. De exemplu, cele mai vechi observații astronomice au situat steaua polară actuală la 12° de pol; în zilele noastre ea se găsește la 1°2′ de pol, pentru ca în jurul anului 2100 să ajungă la numai 27′5″ de pol. Mai tîrziu, actuala stea polară se va depărta, astfel încît după 13 000 ani ea va fi la 46° depărtare unghiulară de pol, iar steaua α Lyra (Vega) va fi considerată stea polară.

În mișcarea de nutație, axa terestră descrie în jurul poziției sale medii un mic con cu baza eliptică; perioada acestei mișcări este de aproximativ 18,66 ani. Nutația are ca efect, înlocuirea conului de revoluție, corespunzător precesiei, printr-un con cu baza ondulată (figura 3.9).

3.5. Mișcarea circulară relativă

Un corp A (figura 3.10) se mișcă față de suprafața Pămîntului cu viteza relativă $\vec{w}$, iar viteza punctului de pe suprafața Pămîntului, în care se află corpul, este $\vec{v}$. Viteza $\vec{v}$ se referă la sistemul stelelor fixe. Pentru simplificarea raționamentului și fără a reduce generalitatea fenomenului, se presupune că cele două viteze sînt coliniare (figura 3.10). Teorema de compunere a vitezelor permite să se scrie

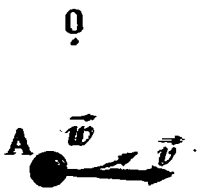


Fig. 3.10. Mișcarea relativă a unui mobil cu viteza $\vec{w}$ față de un sistem în mișcare circulară cu viteza de transport $\vec{v}$

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{w}$$

$\vec{V}$ este viteza față de sistemul presupus fix (sistemul stelelor fixe). Viteza $\vec{V}$ este importantă cînd atenția noastră depășește cadrul pămîntesc, și anume cînd interesează mișcarea aștrilor pe cer, ca în Astronomie, sau cînd se urmărește mișcarea unei nave cosmice, ca în Astronautică.

Definind vitezele unghiulare, absolută Ω, de transport ω_t și relativă ω_r

$$\Omega \equiv \frac{V}{R}, \quad \omega_t \equiv \frac{v}{R}, \quad \omega_r \equiv \frac{w}{R} \tag{3.10}$$

(R fiind raza Pămîntului în punctul considerat) teorema de compunere a vitezelor scrisă mai înainte, devine

$$\Omega = \omega_t \pm \omega_r \tag{3.11}$$

în care se exprimă relația între vitezele unghiulare în cazul mișcării circulare relative. Această relație ar fi putut să fie scrisă și sub formă vectorială; în cazul mișcării circulare vectorii vitezelor unghiulare sînt totdeauna situați pe axul de rotație. Păstrînd forma algebrică, semnul + se referă la cazul cînd rotația de transport și cea relativă au același sens, iar semnul — cînd cele două rotații au sensuri contrarii.

Relația de compunere a vitezelor unghiulare se poate pune sub două alte forme mult mai comode pentru calcule. În prima formă se folosesc: perioada de rotație de transport, T_t, a sistemului mobil față de sistemul fix, perioada de rotație relativă, T_r, a corpului față de sistemul mobil și perioada de rotație, zisă absolută, T, față de sistemul presupus fix

$$\omega_t = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_r = \frac{2\pi}{T_r} \text{ și } \Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.12}$$

Teorema de compunere a vitezelor unghiulare (3.11) exprimată în această nouă formă dă teorema de compunere a perioadelor de rotație

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_t} \pm \frac{1}{T_r};$$

Aducînd, în membrul doi, la același numitor și inversînd relația se obține

$$T = \frac{T_t \cdot T_r}{T_t \pm T_r} \tag{3.13}$$

cu convenția de semn: semnul + cînd rotațiile au același sens și semnul — cînd rotațiile au sensuri contrare.

Dacă interesează frecvența de rotație f, definită ca inversul perioadei de rotație,

$$f \equiv \frac{1}{T},$$

atunci pe baza relației între viteza unghiulară și frecvența de rotație, se poate scrie teorema de compunere a frecvențelor de rotație

$$f = f_t \pm f_r \tag{3.14}$$

unde f este frecvența de rotație față de sistemul fix, f_t este frecvența de rotație a sistemului mobil, iar f_r este frecvența de rotație relativă a corpului față de sistemul mobil.

Ce se întîmplă cu accelerația centripetă în cazul mișcării circulare relative? În mișcarea circulară a unui corp cu viteza lineară V, accelerația centripetă este $a_c = V^2/R$. În cazul mișcării circulare relative (figura 3.10), accelerația centripetă a (zisă absolută) față de sistemul fix este

$$a = \frac{V^2}{R} = \frac{(v + w)^2}{R} = \frac{v^2}{R} + \frac{w^2}{R} + \frac{2vw}{R} \tag{3.15}$$

adică conține accelerația centripetă de transport, v^2/R, accelerația centripetă relativă, w^2/R, și o accelerație complementară, a_C

$$a_C = 2\frac{vw}{R} = 2\omega_t \cdot w \tag{3.16}$$

a_C are un rol important în dinamică. Aici reținem numai aspectul cinematic și anume: pentru existența unei mișcări circulare este necesară o accelerație centripetă, iar pentru o mișcare circulară relativă este necesară o accelerație complementară, pe lîngă accelerațiile centripetă de transport și relativă. În fine trebuie menționat faptul că accelerația complementară se poate scrie vectorial pe baza constatării experimentale că în cazul $\vec{w} \parallel \vec{v}$ accelerația complementară are direcția și sensul accelerației centripete, adică este îndreptată spre centrul mișcării și deci

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_t \times \vec{w}.$$

Această relație este adevărată pentru orice orientare a vectorului $\vec{w}$.

Exemplu

Avioanele de pasageri moderne au ajuns la viteza (faţă de sol) $w = 1\,660$ km/h. Dacă un asemenea avion zboară în lungul Ecuatorului odată spre Răsărit şi apoi spre Apus, timp suficient de lung în cele două sensuri, se pune întrebarea de cîte ori vor vedea pasagerii răsărind Soarele în 24 ore.

Pămîntul are perioada de rotaţie (faţă de Soare) $T_t = 24$ h şi o frecvenţă de rotaţie $f_t = 1$, raportată la 24 ore. Cu ajutorul vitezei relative w dată, se calculează pentru avion, perioada de rotaţie relativă $T_r = \dfrac{2\pi}{\omega_r} = \dfrac{2\pi R}{w} = 24$ h, frecvenţa de rotaţie relativă (faţă de Pămînt) este $f_r = 1$, de asemenea raportată la 24 ore.

Teorema de compunere a perioadelor de rotaţie sau a frecvenţelor de rotaţie dă pentru zborul spre răsărit

$$T = \frac{T_t \cdot T_r}{T_t + T_r} = \frac{24 \cdot 24}{2 \cdot 24} = 12 \text{ h}$$

$$f = f_t + f_r = 1 + 1 = 2$$

adică ei vor vedea răsărind Soarele de două ori în 24 ore. Pentru zborul spre Apus, perioada de rotaţie şi frecvenţa de rotaţie sînt

$$T = \frac{T_t \cdot T_r}{T_t - T_r} = \frac{24 \cdot 24}{0} = \infty$$

$$f = f_t - f_r = 1 - 1 = 0$$

adică nu vor vedea răsărind Soarele niciodată, în sensul că vor avea în continuu Soarele în aceeaşi poziţie ca aceea de la decolare. Cu alte cuvinte vor ateriza în oricare punct al Pămîntului (pe Ecuator) la aceeaşi oră locală cu aceea de la decolare. Acest rezultat era de aşteptat deoarece avionul are viteza relativă w egală cu viteza de transport v a Pămîntului la Ecuator.

3.6. **Două corpuri în mişcare circulară**

Problema a două corpuri în mişcare circulară este esenţială în Astronomie şi în Astronautică. Dacă aceste corpuri au respectiv, vitezele unghiulare Ω_1 şi respectiv Ω_2, faţă de sistemul fix, interesează viteza unghiulară relativă a unuia faţă de celălalt. Extinzînd relaţia (3.9) pentru acest caz, deoarece s-a văzut că teorema de compunere a vitezelor (3.4) se extinde şi asupra vitezelor unghiulare (3.11) se poate scrie expresia vitezei unghiulare relative

$$\omega_r = \Omega_2 \pm \Omega_1$$

cu convenţia de semn:

semnul $+$, rotaţiile au sensuri contrare
semnul $-$, rotaţiile au acelaşi sens

Formula de mai sus are numeroase aplicaţii, dacă se introduc perioadele de rotaţie

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{T_2} \pm \frac{1}{T_1} \; ; \qquad T_r = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_1 \pm T_2}$$

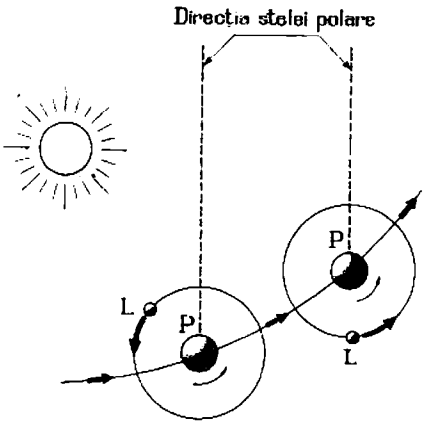


Fig. 3.11. Considerînd mișcarea proprie a Pămîntului și mișcarea Lunii în jurul Pămîntului se obține perioada de rotație relativă a Lunii față de un punct de la suprafața Pămîntului

Una din aplicațiile acestei formule constă în determinarea timpului de întîlnire a Lunii cu un punct de pe suprafața Pămîntului (v. exemplul 1). Altă aplicație este determinarea perioadei de rotație relativă a doi aștri, care arată durata între 2 întîlniri, adică între 2 conjuncții, cum se spune în astronomie (v. exemplul 2).

Exemplul 1.

Pămîntul se rotește în jurul axei sale, față de sistemul stelelor fixe, cu perioada T_1; Luna se rotește în jurul Pămîntului cu perioada T_2 de asemenea față de sistemul stelelor fixe. Cele două perioade au valorile

$$T_1 = 23{,}934 \text{ h} = 86\,164 \text{ s (nu 24 h!)}$$

$$T_2 = 27{,}32 \text{ d} = 2{,}360 \cdot 10^6 \text{s}$$

ambele rotații făcîndu-se în același sens (figura 3.11). Perioada de rotație relativă T_r

$$T_r = \frac{T_1 \cdot T_2}{|T_1 - T_2|} = 89\,430 \text{ s} = 24 \text{ h } 51 \text{ min} = 24{,}84 \text{ h}$$

exprimă timpul între două treceri ale Lunii deasupra unui punct fix de pe suprafața Pămîntului, adică timpul de revenire a Lunii la meridianul locului. Prin urmare Luna revine la meridian după mai mult de 24 h, adică întîrzie față de Soare cu 51 min. Acest calcul s-a făcut presupunînd o orbită circulară pentru Lună. În realitate întîrzierea peste 24 h variază în cursul unei durate mai mari de timp, între 50 și 60 minute.

Exemplul 2.

Se studiază mișcarea Lunii din punctul de vedere al fazelor sale. Aceste faze depind de mișcarea relativă a Lunii față de Soare. Pentru aceasta se consideră mișcarea aparentă a Soarelui și a Lunii în jurul Pămîntului. În acest caz, perioadele de rotație respective sînt

$$T_s = 24 \text{ h (aici 24 h!)}$$

$$T_L = 24{,}84 \text{ h}$$

T_L fiind tocmai T_r calculat mai înainte în exemplul 1. Această mișcare relativă este reprezentată grafic în figura 3.12 și este de fapt mișcarea aparentă pe care un observator de pe Pămînt o vede pe bolta cerească.

Perioada de rotație relativă a acestei mișcări este

$$T_r = \frac{T_s \cdot T_L}{|T_s - T_L|} = 709 \text{ h} = 29{,}53 \text{ d}$$

T_r este timpul între „2 întîlniri", pentru un observator de pe Pămînt, adică de la conjuncție la conjuncție (lună nouă); el este egal cu timpul de la o opoziție la alta (Lună plină).

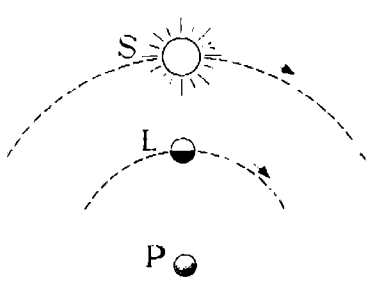


Fig. 3.12. Sensurile de rotație în mișcarea aparentă a Soarelui și Lunii în jurul Pămîntului

3.7. Principiul invarianței galileiene

Observatorul care ia parte la producerea unui fenomen fizic stabilește ecuația după care fenomenul are loc și caută să o transpună la propriul său sistem de referință. Experimental se observă că unele mărimi se modifică la trecerea de la un sistem de referință la altul, pe cînd alte mărimi rămîn

invariante. De exemplu, s-a văzut că viteza unui corp nu este invariantă, deoarece are valori diferite în sisteme de referință diferite, spre deosebire de alte mărimi de exemplu, sarcina electrică, care își păstrează valoarea în sisteme de referință diferite.

Transformările lui Galilei permit să se urmărească modificarea ecuațiilor și deci a mărimilor cînd se trece dintr-un sistem de referință în altul. Cu ajutorul lor s-a stabilit teorema de compunere a vitezelor, care arată cum „variază" viteza unui corp în funcție de viteza sistemului de referință în care aceasta este măsurată. Transformările lui Galilei permit stabilirea mărimilor invariante și a celor care nu sînt invariante față de modificarea sistemului de referință.

Sînt necesare cîteva precizări în ceea ce privește sistemul de referință. Un sistem de referință care se deplasează rectiliniu și uniform se numește *sistem inerțial*, pentru motive care vor fi arătate în continuare. Din acest punct de vedere Pămîntul nu constituie un sistem inerțial, datorită mișcării sale de rotație. Totuși, în anumite cazuri, pentru o durată relativ mică față de perioada de rotație a Pămîntului, se consideră că sistemul de referință legat de Pămînt este un sistem inerțial: această situație se întîlnește, de exemplu, în experimentul lui Michelson și Morley, la care se va apela în capitolul următor. Un sistem de referință inerțial ar fi acela legat de o navă cosmică care s-ar mișca în spațiul extragalactic, departe de orice interacțiune cu vreun alt corp.

Pentru observațiile făcute pe Pămînt, un sistem de referință inerțial este cel legat de stele. Pe sfera cerească stelele ocupă, pentru o durată de timp suficient de mare, locuri fixe și sistemul de referință solidar cu *stelele fixe* este folosit pentru descrierea mișcării planetelor sau a mișcării navelor cosmice. Astfel, în cele ce urmează, sistemul legat de stele va fi sistemul O iar sistemul care se deplasează față de acesta va fi sistemul O'.

Se consideră, în sistemul O', o bară de lungime l' definită prin abscisele x'_1 și x'_2 ale extremităților ei, măsurate față de sistemul O'

$$l' = x'_2 - x'_1$$

Pentru observatorul din sistemul O' aceasta este o *lungime statică*, deoarece observatorul se află în repaus față de ea. Observatorul din sistemul O va măsura această lungime determinînd abscisele x_1 și x_2 ale extremităților ei față de sistemul în care el se găsește și va obține

$$l = x_2 - x_1$$

Pentru observatorul din sistemul O, lungimea l a barei este o *lungime cinematică*, întrucît bara se află în mișcare față de acest observator, ea aflîndu-se în sistemul mobil O'

Cu ajutorul formulelor de transformare ale lui Galilei (3.1) se poate stabili relația dintre mărimile l' și l ale lungimii barei considerate, știind că extremitățile ei sînt observate în același moment de către fiecare din cei doi observatori din sistemul O și respectiv, sistemul O'. Rezultă

$$x'_2 = x_2 - vt \qquad \text{și} \qquad x'_1 = x_1 - vt$$

de unde

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 \qquad \text{adică} \qquad l' = l$$

ceea ce înseamnă că *lungimea statică este egală cu lungimea cinematică.* Cu alte cuvinte, lungimea unei bare măsurată de un observator în repaus față de ea prezintă aceeași valoare și în cazul în care observatorul se mișcă, față de ea, rectiliniu și uniform, pe direcția ei. Prin urmare *față de sistemele de referință inerțiale lungimea este un invariant.*

În însești formele de transformare ale lui Galilei s-a folosit *timpul ca un invariant.* Aceasta este o ipoteză de bază a fizicii clasice. De asemenea s-a văzut în paragraful 3.2 că față de sistemele inerțiale *accelerația este un invariant.*

Consecința acestor considerații este că ecuația mișcării unui corp nu se schimbă la trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul; accelerația ca invariant impune aceeași ecuație a unei mișcări accelerate. Aceste observații au fost făcute de Galilei și pe baza lor a fost formulat principiul relativității clasice sau principiul invarianței galileiene și anume:

Nici o experiență mecanică executată într-un sistem inerțial nu poate să pună în evidență mișcarea acestuia față de un alt sistem de referință. Legile mecanicii sînt identice, pentru toate sistemele inerțiale, sisteme care se mișcă cu viteză constantă unul față de altul.

Acest fapt conduce la concluzia că legile fenomenelor mecanice nu sînt influențate de translația sistemului inerțial în care se studiază. Astfel, mișcarea uniformă sau accelerată a unei bile pe plan orizontal, mișcarea unui corp pe un plan înclinat, căderea liberă a unui corp, ciocnirea a două bile sau oscilațiile unui pendul se fac la fel într-un vagon de tren, fie că acesta este în repaus față de sol, fie că se deplasează pe sol cu o mișcare rectilinie și uniformă. Aceeași constatare este adevărată pentru un vapor pe o apă curgătoare sau pentru o navă cosmică care se deplasează rectiliniu și uniform în spațiul extragalactic. În toate aceste sisteme inerțiale un joc de biliard sau un joc de popice poate avea loc fără ca jucătorii să-și dea seama de mișcarea rectilinie și uniformă a sistemului lor de referință.

Dacă sistemul de referință nu este inerțial, deci dacă se deplasează accelerat, atunci observațiile efectuate în acest sistem pot pune în evidență mișcarea acestuia. De exemplu un joc de biliard este puternic deranjat la accelerarea sau frînarea trenului, precum și la executarea unei curbe, ceea ce permite jucătorilor să-și dea seama de modul de mișcare a trenului.

Dacă aflîndu-ne într-un sistem putem observa obiecte din celălalt sistem, putem stabili viteza de transport a unui sistem față de celălalt, dar nu se poate afla care este sistemul fix și care este cel mobil. De exemplu, cînd în stație sînt două trenuri, de multe ori se întîmplă ca la plecarea trenului, să nu ne putem da seama dacă trenul care a plecat este cel în care ne aflăm sau celălalt. Dacă se pot repera obiecte într-un sistem „fix", atunci se poate stabili mișcarea față de acesta. Astfel omul reperînd stelele pe bolta cerească a dedus, de-a lungul timpurilor, mișcarea Pămîntului, a Lunii și a Soarelui, în sistemul stelelor fixe.

Principiul invarianței galileiene are numeroase aplicații în fizică, așa cum se va vedea în capitolele următoare. Acest principiu a fost folosit în diferite domenii ale fizicii la mișcări ale sistemelor de referință cu viteze din ce în ce mai mari. La viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii, s-au constatat diferențe între formele de exprimare ale legii unui fenomen, de exemplu legea mișcării unui corp în două sisteme de referință inerțiale. Această neconcordanță a condus la analiza invarianței galileiene și a descoperirii invarianței einsteiniene, aplicabilă la viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii.

Capitolul **4**

Invarianța einsteiniană

4.1. Experimentul lui Michelson și Morley

În studiul fenomenelor mecanice, pentru măsurarea lungimilor, a timpurilor sau a vitezelor sînt folosite „semnale", pe care observatorul le primește în experimentele efectuate. Aceste semnale pot fi acustice sau luminoase; *semnalele luminoase* joacă un rol primordial, deoarece cu ajutorul lor se constată coincidența lungimilor sau se observă mișcarea acelor indicatoare ale ceasornicelor cu care se măsoară timpurile. Semnalele luminoase fac parte din grupa *semnalelor electromagnetice* folosite astăzi din ce în ce mai mult pentru măsurarea lungimilor sau chiar a vitezelor. Cel mai bun exemplu îl oferă radarul folosit atît pentru măsurarea lungimilor terestre sau a distanțelor pînă la planete, cît și pentru măsurarea vitezelor: a automobilelor, a avioanelor, a navelor spațiale etc. Din aceste considerații rezultă că radiațiile electromagnetice, în general, și lumina în special, constituie un „instrument" general, în sensul că toate capitolele fizicii și mai ales mecanica, face adeseori uz de el în toate experimentele.

Studiul propagării luminii în sisteme care se mișcă unul față de altul l-a condus pe Einstein la stabilirea teoriei relativității. Punctul de plecare al acestui studiu l-a constituit experimentul lui Michelson și Morley realizat în 1887; simplu în principiu, acest experiment a stat la baza unei teorii care a revoluționat fizica.

Principiul experimentului lui Michelson și Morley este următorul: o sursă luminoasă trimite două fascicule de lumină în două direcții perpendiculare. Sursa de lumină este situată pe Pămînt în punctul P și cele două direcții sînt astfel, încît una să coincidă cu deplasarea punctului P în spațiu (în sistemul legat de stele), iar cealaltă să fie perpendiculară pe această direcție (figura 4.1). De exemplu, dacă punctul P este pe Ecuator, A se găsește în lungul Ecuatorului la distanța D, iar B pe meridianul lui P tot la distanța D. Punctul P se deplasează în spațiu, față de sistemul stelelor cu viteza $\vec{v}$ (viteza de transport a sistemului mobil, în cazul de față Pămîntul).

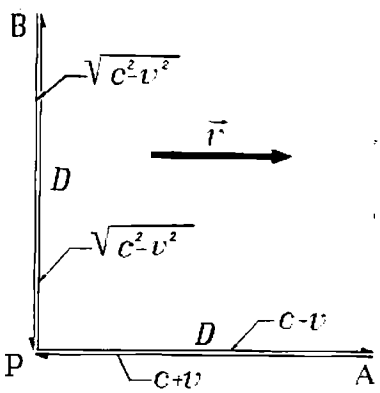


Fig. 4.1. Vitezele de propagare a luminii față de Pământ, calculate prin teorema de compunere a vitezelor din cadrul invarianței galileiene, c fiind viteza luminii față de spațiul vid și v viteza de transport a Pământului față de același spațiu

La efectuarea experimentului se cunoștea că lumina se propagă cu viteza c, în spațiul vid, interplanetar, intragalactic, sau chiar extragalactic, și că mediul în care se propagă lumina nu este antrenat de mișcarea vreunui astru și deci, nici de mișcarea Pământului. Ipoteza făcută de Michelson și Morley a fost că viteza luminii măsurată față de Pământ, ar trebui să corespundă cu viteza calculată pe baza teoremei de compunere a vitezelor (§ 3.2). Dacă c este viteza luminii față de sistemul stelelor și v este viteza de transport a Pământului față de același sistem, atunci vitezele luminii față de Pământ (v. § 3.3) sînt cele indicate în figura 4.1, punctele P, A și B fiind solidare cu Pământul. Cu valorile acestor viteze se calculează timpurile de propagare a luminii pe distanțele D, dus și întors, timpul de propagare longitudinal t_l (pentru segmentul PA) și timpul de propagare transversal t_t (pentru segmentul PB)

$$\left.\begin{aligned} t_l &= \frac{D}{c+v} + \frac{D}{c-v} = \frac{2Dc}{c^2-v^2} \\ t_t &= \frac{D}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{D}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2D}{\sqrt{c^2-v^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Michelson și Morley au aranjat experimentul astfel, încît interferența celor două fascicule de lumină să se producă la întoarcerea în P, după ce fiecare fascicul a străbătut drumul respectiv în cele două sensuri. Întrucît din calcule rezultă $t_l \neq t_t$, ei se așteptau ca franjele de interferență să pună în evidență diferența $t_l - t_t$.

Rezultatul experimental surprinzător pentru vremea aceea a fost că interferența celor două fascicule de lumină arăta că $t_l = t_t$. Experimentul, repetat de un mare număr de ori, în mai multe variante, a arătat că timpurile de propagare, dus și întors, a luminii în cele două direcții perpendiculare sînt egale, deși viteza de transport v a punctului P nu este neglijabilă față de viteza c; într-adevăr $v = 30\,000$ m/s.

Acest experiment contrazicea cunoștințele pe care fizica clasică le acumulase cu privire la mișcarea relativă. Într-adevăr, dacă dintr-un avion se aruncă două proiectile, unul în direcția de mers și celălalt perpendicular pe direcția de mers, ambele proiectile avînd aceeași viteză w față de avion, un observator situat într-un anumit punct pe Pământ va determina pentru proiectile viteze V, măsurate față de Pământ, care sînt diferite pentru cele două proiectile. În experimentul lui Michelson și Morley, lucrurile se întîmplă ca și cum viteza luminii față de Pământ are aceeași valoare, independent de mișcarea de transport a sursei de lumină.

Acest rezultat experimental, neașteptat și neinterpretabil în fizica clasică, l-a făcut pe Einstein să elaboreze o altă formă a principiului invarianței și anume principiul invarianței einsteiniene.

4.2. Principiul invarianței einsteiniene

Einstein generalizează rezultatele experimentului lui Michelson și Morley și le exprimă pentru sistemele inerțiale sub o formă din care se deduc alte consecințe. Ideea de bază a teoriei lui Einstein este invarianța vitezei luminii în sistemele inerțiale.

Pentru a înțelege invarianța vitezei luminii față de sistemele inerțiale, se va recurge mai întîi la un exemplu din fizica clasică: propagarea undelor mecanice față de sistemele inerțiale. Fie două bărci care se mișcă una față de alta cu viteza $\vec{v}$ constantă în direcție și mărime (fig. 4.2). Cînd bărcile ajung una lîngă alta, unul din cei doi observatori, indiferent care, A sau B aruncă o piatră între cele două bărci, care provoacă unde mecanice la suprafața apei. Aceste unde circulare se propagă la suprafața apei și *aspectul lor apare diferit celor doi observatori.* A rămîne în centrul valurilor circulare, pe cînd B se depărtează de acest centru. Observînd valurile circulare, A și B pot spune care este mișcarea lor față de mediul în care se propagă valurile: A poate afirma că el este fix, pe cînd B constată mișcarea sa față de apă.

Să trecem acum la experimentul care ilustrează principiul invarianței einsteiniene. Fie două vehicule, cu cei doi observatori A și B, care sînt în mișcare rectilinie și uniformă unul față de altul cu viteza relativă $\vec{v}$ (fig. 4.3). În momentul în care cele două vehicule sînt unul lîngă celălalt, unul din observatori emite un semnal luminos. La fel ca în exemplul anterior, nu este important care din observatori emite semnalul luminos. Presupunînd că se dispune de un mijloc de „detectare rapidă" a propagării luminii, observatorul A va constata propagarea luminii în toate direcțiile sub forma unei „sfere luminoase" a cărei rază crește continuu. Experimental observatorul B va constata același lucru, și anume propagarea undelor sferice în al căror centru se găsește el. Deși vehiculul său se deplasează față de A și față de punctul unde a fost emis semnalul luminos, propagarea luminii sub forma undelor sferice se face pentru observatorul B, în același mod ca și pentru observatorul A, adică pentru amîndoi raza „sferei luminoase" crește cu aceeași viteză. Prin urmare, *lumina se propagă identic, cu aceeași geometrie, și cu aceeași viteză de propagare, în cele două sisteme de referință care se găsesc unul față de celălalt în mișcare rectilinie și uniformă.*

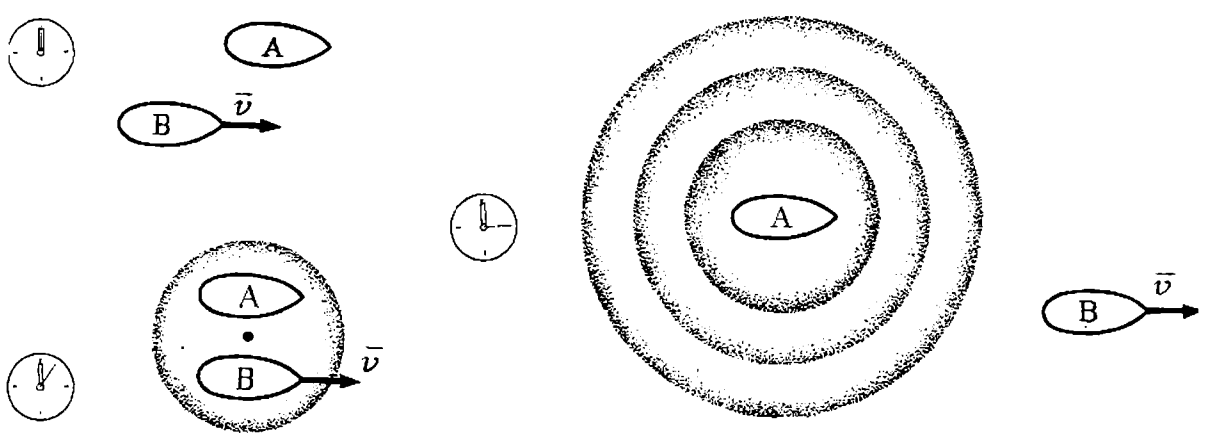


Fig. 4.2. Undele mecanice formate prin aruncarea unei pietre în apă sînt observate diferit de observatorii A și B, astfel încît ei pot caracteriza mișcarea bărcii în care se găsesc. Ceasornicele din stînga figurilor arată că cele trei aspecte au loc la timpuri succesive

Un astfel de experiment, nu se poate efectua deoarece nu există un sistem de „detectare rapidă" a propagării luminii; toate experimentele fizicii moderne arată însă că, în natură, fenomenul propagării luminii în sistemele inerțiale are loc ca în experimentul descris. Acest experiment stă la baza principiului invarianței einsteiniene și el trebuie însușit ca atare; este vorba aici de un fenomen fundamental a cărei explicație cauzală încă nu a fost formulată.

Ceva mai mult, dacă observatorii din experimentul descris mai sus nu observă nici un alt obiect din vreun alt sistem de referință, este imposibil să spună care din ei se află în mișcare și care în stare de repaus. Prin măsurările pe care cei doi observatori le-ar face asupra propagării semnalului luminos, fiecare din ei ar găsi *aceeași valoare a vitezei de propagare a luminii*; cu alte cuvinte fiecare din ei ar constata la fel fenomenul de propagare a luminii. Constanța vitezei luminii și a fenomenului de propagare sînt independente de viteza relativă v a unui observator față de celălalt. Această constanță este adevărată numai pentru sistemele de referință inerțiale.

În consecință, principiul invarianței einsteiniene are următoarea enunțare:

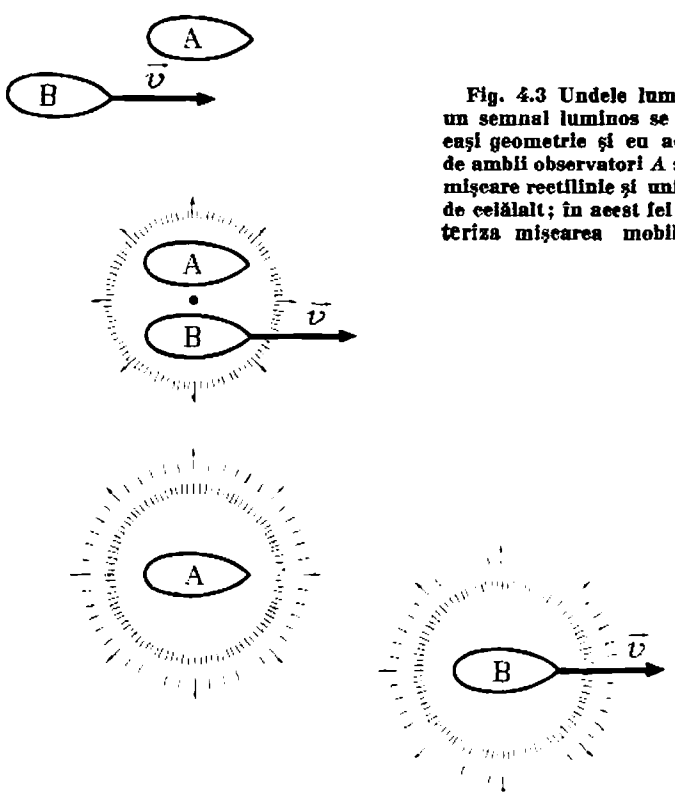


Fig. 4.3 Undele luminoase formate de un semnal luminos se propagă cu aceeași geometrie și cu aceeași viteză față de ambii observatori A și B, deși ei sînt în mișcare rectilinie și uniformă, unul față de celălalt; în acest fel ei nu pot caracteriza mișcarea mobilului în care se găsesc

Legile fizicii sînt identice, adică se exprimă prin același sistem de ecuații pentru toate sistemele de referință inerțiale, sisteme care se mișcă cu viteză constantă unul față de altul.

Viteza luminii în spațiul liber, adică în vid, are aceeași valoare pentru toți observatorii din sistemele inerțiale, independent de starea lor de mișcare adică de viteza unuia față de celălalt.

Prima parte a principiului pune în evidență faptul că nu există nici un sistem de referință fix (în repaus). Dacă legile fizicii ar avea o formă diferită pentru observatorii din diferitele sisteme de referință aflate în mișcare unul față de altul, atunci ei ar putea să deducă din aceste „diferențe" care dintre ei sînt în mișcare și care observator este staționar în spațiu. În natură această distincție nu se poate face, deoarece nu există un sistem de referință absolut fix.

Prima parte a principiului invarianței einsteiniene este asemănătoare cu principiul invarianței galileiene, cu deosebirea că unul se referă la „legile fizicii" pe cînd celălalt la „legile mecanicii". Prin urmare din acest punct de vedere principiul lui Einstein este mai general decît acela al lui Galilei. A doua parte a principiului invarianței einsteiniene este nouă și caracteristică teoriei lui Einstein. În unele cărți invarianța einsteiniană este prezentată sub forma a două principii: principiul relativității și principiul constanței (invarianței) vitezei luminii, care sînt de fapt cele două părți ale principiului enunțat mai înainte.

Viteza luminii în spațiul liber este o constantă universală

$$c = 2{,}997\,93 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

În calcule, se poate folosi valoarea aproximativă $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, care diferă cu numai 0,2% de valoarea adevărată.

Viteza luminii ocupă o poziție cu totul diferită față de celelalte viteze; acest lucru va fi pus în evidență atît în capitolul de față cît și în alte capitole ale cărții. În interpretarea galileiană a invarianței, viteza nu era un invariant; în interpretarea einsteiniană însă *viteza luminii este un invariant.* În paragrafele care urmează se va arăta că *nu orice viteză este un invariant.*

Referitor la celelalte mărimi invariante în aspectul galileian, distanța și timpul, se va vedea că în aspectul einsteinian aceste mărimi nu mai rămîn invariante odată cu schimbarea sistemului de referință inerțial.

4.3. Transformările lui Lorentz

După Einstein viteza luminii în vid este un invariant în toate sistemele inerțiale. Cu alte cuvinte, o undă sferică de lumină emisă de o sursă punctiformă într-un sistem inerțial va apare ca undă sferică și unui observator din oricare alt sistem inerțial. *Deci nu apare nici o deformare a undei sferice pentru niciunul dintre observatori.* Această afirmație corespunde rezultatului experimentului din paragraful precedent. Se consideră două sisteme inerțiale $Oxyz$ și $O'x'y'z'$; sistemul O' este în mișcare față de sistemul O pe direcția Ox cu viteza de transport v. În centrul O al primului sistem se găsește o sursă de lumină, care emite un semnal luminos la $t = 0$. Ecuația undei sferice luminoase este descrisă de binecunoscuta relație

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{4.2}$$

Membrul al doilea c^2t^2 reprezintă pătratul razei sferei luminoase care crește în timp cu viteza c. Presupunînd că la $t = 0$ și $t' = 0$ cele două sisteme O

și O' au coincis, sursa de lumină a emis semnalul luminos și la $t' = 0$ în centrul O'. Pentru un observator din sistemul O' ecuația undei sferice va fi

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{4.3}$$

deoarece raza acestei sfere luminoase crește în timp tot cu viteza c, deși sistemul O' se deplasează față de O cu viteza v. Asemănarea ecuațiilor (4.2) și (4.3) atît din punctul de vedere al formei ecuațiilor, cît și din punctul de vedere al coeficientului timpului, reprezentat prin viteza luminii c, este o consecință a principiului invarianței einsteiniene. Ar trebui să se ajungă de la una la cealaltă pentru anumite transformări aplicate coordonatelor x' y', z' și t'.

Dacă ecuației (4.3) i s-ar aplica transformările lui Galilei (3.1) s-ar obține

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

$$x^2 - 2vxt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{4.4}$$

Ecuația (4.4) nu are aceeași formă cu ecuația (4.2). Prin urmare transformările lui Galilei nu sînt în concordanță cu invarianța constantei c. Este necesară deci găsirea unor transformări care să aducă ecuația (4.3) sub forma ecuației (4.2). Identitatea celor două ecuații ar exprima faptul experimental că doi observatori din două sisteme inerțiale *observă unde sferice identice pentru același semnal luminos*. Fenomenul propagării luminii nu se deformează pentru niciunul din cei doi observatori, conform principiului invarianței einsteiniene.

Pentru identitatea ecuațiilor (4.4) și (4.2), ar trebui ca termenul $-2vxt + v^2t^2$ din ecuația (4.4) să se anuleze. Deoarece timpul intervine sub formele $x \cdot t$ și t^2, este evident că relația $t' = t$ nu poate fi adevărată. De aceea este necesară o formă liniară pentru relația între timpurile t' și t, în care timpul t' să fie funcție atît de timpul t cît și de variabila x

$$t' = t + fx \tag{4.5}$$

unde f este o constantă care ar trebui determinată. Folosind transformările lui Galilei pentru x', y', z' și transformarea (4.5) pentru t', ecuația (4.3) devine

$$x^2 - 2vxt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(t^2 + 2fxt + f^2x^2)$$

$$x^2 - 2vxt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2fc^2xt + f^2c^2x^2 \tag{4.6}$$

Se observă că termenul în xt se anulează dacă

$$-v = fc^2 \quad \text{sau} \quad f = -\frac{v}{c^2}$$

Cu această valoare a constantei f, relația (4.6) devine

$$x^2 + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + \frac{v^2}{c^2}x^2$$

$$x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2 - v^2t^2$$

$$x^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+y^2+z^2=c^2t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Se remarcă că expresia astfel obținută diferă de ecuația (4.2), la termenii în x^2 și t^2, doar prin factorul $(1-v^2/c^2)$. Acest factor trebuie să apară în expresiile lui x' și t', astfel încît transformările obținute să permită obținerea ecuației (4.2) din ecuația (4.3). Transformările căutate, numite transformările lui Lorentz vor avea forma

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Se precizează că axa Ox și respectiv axa $O'x'$ au fost alese paralele cu direcția de transport a sistemului O'.

Se poate verifica cu ușurință că expresiile (4.7) aduc ecuația (4.3) sub forma (4.2). Cu alte cuvinte *pentru transformările lui Lorentz propagarea luminii rămîne aceeași din punctul de vedere al celor doi observatori situați în sistemele inerțiale O și O'.*

Se folosește notația $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$; γ se numește factorul lui Lorentz, iar cu această notație transformările lui Lorentz se scriu

$$x'=\gamma(x-vt);\quad y'=y;\quad z'=z;\quad t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \qquad (4.8)$$

După cum se vede, γ depinde de viteza relativă v a sistemelor inerțiale. Pentru cele ce urmează această dependență este foarte importantă; ea este dată în figura 4.4 și în tabelul 4.1. Pentru viteze mici, cînd $v/c \to 0$, factorul lui Lorentz devine $\gamma = 1$, iar transformările lui Lorentz se reduc la transformările lui Galilei. Altfel spus, invarianța galileiană (mecanica clasică) este un caz limită al invarianței einsteiniene (mecanica relativistă).

Dacă viteza relativă v a unui sistem inerțial față de un altul crește foarte mult și tinde către viteza luminii, atunci

$$\lim_{v\to c}\gamma=\infty$$

Pentru ca factorul γ să nu devină imaginar, adică să fie real, trebuie ca viteza v a unui sistem inerțial să nu depășească viteza luminii. Apare astfel o consecință extrem de importantă a invarianței einsteiniene: în mișcarea unui sistem sau corp material viteza luminii nu poate fi depășită. Constanta c este o *viteză limită* în univers.

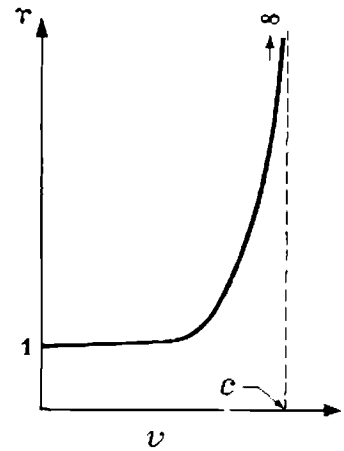


Fig. 4.4. Dependența factorului lui Lorentz γ de viteza relativă v a sistemelor inerțiale $Oxyz$ și $O'x'y'z'$

Tabelul 4.1

Valorile factorului lui Lorentz în funcție de $\beta = v/c$; viteza v este dată cu o aproximație de 0,2 %, valorile notate cu $\sim c$ fiind practic egale cu viteza c

β	v m/s	γ
0,0001	3.10^4	1,00
0,001	3.10^5	1,00
0,01	3.10^6	1,00
0,1	3.10^7	1,01
0,5	$1{,}5.10^8$	1,16
0,6	$1{,}8.10^8$	1,25
0,7	$2{,}1.10^8$	1,40
0,8	$2{,}4.10^8$	1,67
0,9	$2{,}7.10^8$	2,30
0,95	$2{,}8.10^8$	3,20
0,99	$2{,}9.10^8$	7,09
$0{,}999 = 1-10^{-3}$	$\sim c$	22,4
$0{,}999\,9 = 1-10^{-4}$	$\sim c$	71,0
$0{,}999\,99 = 1-10^{-5}$	$\sim c$	224
$\ldots \quad 1-10^{-6}$	$\sim c$	710
$1-10^{-7}$	$\sim c$	$2{,}2.10^3$
$1-10^{-8}$	$\sim c$	$7{,}1.10^3$
$1-10^{-9}$	$\sim c$	$2{,}2.10^4$
$1-10^{-10}$	$\sim c$	$7{,}1.10^4$
$1-10^{-11}$	$\sim c$	$2{,}2.10^5$
$1-10^{-12}$	$\sim c$	$7{,}1.10^5$

4.4. Contracția spațiului

Se consideră o bară de o anumită lungime situată în sistemul O'. Pentru un observator din sistemul O', această lungime se exprimă prin diferența dintre abscisele extremităților

$$l' = x'_2 - x'_1$$

Această lungime este o *lungime statică* deoarece observatorul care o măsoară este în repaus față de obiectul măsurat. Pentru observatorul din sistemul O lungimea aceleiași bare va fi

$$l = x_2 - x_1$$

Aceasta este o *lungime cinematică*, deoarece observatorul care o măsoară este în mișcare față de bara măsurată, sau, ceea ce este tot una, bara măsurată este în mișcare față de operatorul care execută măsurarea; conform invariantei einsteiniene nu se poate preciza decît că cele două sisteme, cel care conține bara și cel în care se află operatorul, sînt în mișcare unul față de celălalt.

Aplicînd lungimii statice transformările lui Lorentz se obține

$$l' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) = \gamma(x_2 - x_1)$$

deoarece s-a presupus că măsurarea celor două coordonate x_1 și x_2 s-a făcut la același timp t. În continuare, se obține

$$l' = \gamma l;\ l = l'/\gamma \tag{4.9}$$

Cum $\gamma > 1$ rezultă $l < l'$ sau

lungimea cinematică < lungimea statică

Cu alte cuvinte, lungimile din sisteme în mișcare față de sistemul nostru ne apar contractate, dacă sînt măsurate de noi din sistemul în care ne aflăm. Dacă un observator măsoară lungimea unui vehicul și apoi, el rămînînd în sistemul în care a făcut măsurarea, măsoară lungimea aceluiași vehicul în mișcare, va găsi o lungime mai mică, în funcție de factorul γ, factor care depinde de viteza de transport v a vehiculului.

Inversînd situațiile, dacă bara care se măsoară ar fi fost situată în sistemul O, observatorul din O' ar fi obținut de asemenea prin măsurare o lungime cinematică mai mică decît lungimea statică.

Prin urmare contracția spațiului arată că nici un sistem inerțial nu este privilegiat în sensul că nu se poate pune în evidență care sistem este în repaus și care este în stare de mișcare. Din compararea lungimii cinematice cu lungimea statică se obține numai viteza v a unui sistem față de celălalt.

Un exemplu va lămuri mai bine aceste considerații. Fie o navă cosmică lungă de 65 metri, fixată pe cosmodrom pe rampa de lansare AB presupusă orizontală, de aceeași lungime, 65 metri (fig. 4.5, *a*). După ce nava a pornit și după ce a atins viteza de 190 000 km/s ($\gamma = 1{,}3$) trece din nou prin dreptul rampei de lansare; observatorul de pe cosmodrom va observa că nava (fig. 4.5, *b*) are o lungime de numai $l = l'/\gamma = 65/1{,}3 = 50$ m, iar observatorul

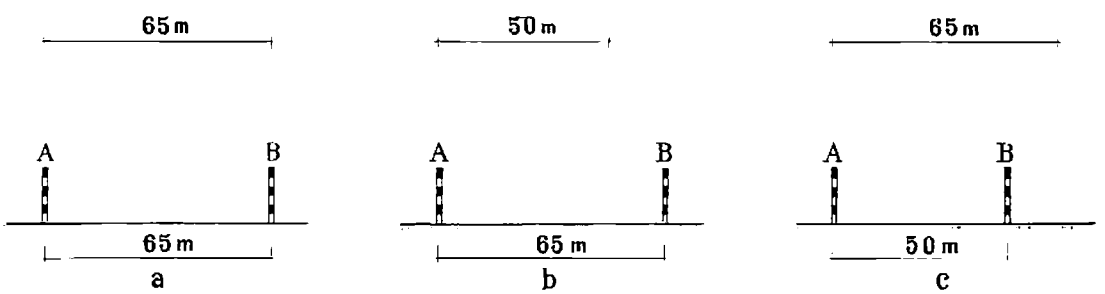
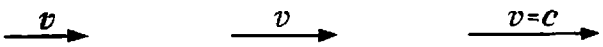


Fig. 4.5. Lungimile navei și ale rampei de lansare AB, măsurate de doi observatori: *a*) ambii observatori sînt în repaus, *b*) lungimile măsurate de observatorul de pe cosmodrom, *c*) lungimile măsurate de observatorul din navă

din navă va constata că rampa de lansare AB are lungimea de $65/1{,}3 = 50$ m (fig. 4.5, *c*). Prin urmare, mecanicul cosmodromului constată că nava s-a contractat pe cînd pilotul navei afirmă că rampa de lansare s-a contractat.

Se precizează că numai lungimea pe direcția mișcării se contractă. De exemplu, un observator „fix" va constata că roata unui vehicul care se deplasează cu viteză foarte mare nu-i mai apare circulară ci eliptică. Dacă $v \to c$ această elipsă tinde către o dreaptă (fig. 4.6).



$v \ll c$	v=180000km/s	v=240000km/s	$v=c$
τ=1	τ=1,25	τ=1,66	$\tau=\infty$
	τ'=0,8τ	τ'=0,6τ	τ'=0

Fig. 4.6. Un observator „fix" găsește prin măsurare că lungimea razei unei roți în mișcare cu viteza v, se contractă dacă viteza v se apropie de valoarea c. Este vorba de contractarea razei pe direcția de mișcare

4.5. Dilatarea timpului

Intervalele de timp sînt afectate și ele de mișcarea relativă. Fie un fenomen oarecare care se desfășoară în timp, într-un punct A al sistemului O'; ca urmare, durata fenomenului măsurată de observatorul din sistemul O' va fi

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

Un observator din sistemul O va măsura durata aceluiași fenomen și va găsi

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Ținînd seama că fenomenul este localizat în sistemul O', durata $\Delta t'$ este *statică* deoarece este măsurată de observatorul în repaus față de sistemul în care are loc fenomenul, iar Δt este *durata cinematică*, deoarece este măsurată de un observator în mișcare față de sistemul în care are loc fenomenul respectiv.

Folosind transformările lui Lorentz (4.8) se obține

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2} - t_1 + \frac{vx_1}{c^2}\right)$$

Pentru timpurile t'_2 și t'_1 s-au folosit coordonatele x_2, respectiv x_1, deoarece fenomenul are loc în intervalul de timp în care poziția punctului A trece de la x_1 la x_2, față de sistemul O, cu toate că punctul A rămîne în repaus față de sistemul O'. Relația de mai sus se poate scrie sub forma

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right]$$

sau

$$\Delta t' = \gamma \Delta t\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)$$

Dar $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v$ constituie ecuația de mișcare a punctului A, față de sistemul O. Deci

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma \Delta t \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{4.10}$$

Din cauză că $\gamma > 1$, *durata cinematică este mai mare decît durata statică*; observatorul aflat în mișcare observă totdeauna o durată mai mare a fenomenelor.

Prin dilatare se înțelege de obicei „mai mare decît mărimea normală" și de aceea se spune dilatarea timpului. Duratele apar dilatate dacă sînt măsurate de către un observator aflat în mișcare față de sistemul de referință unde se desfășoară fenomenul.

Pentru a exemplifica această consecință a invarianței einsteiniene se presupun două ceasornice. Unul este luat de o navă cosmică care se deplasează cu viteză mare ($\gamma \gg 1$). Durata de parcurgere de către acul indicator a cadranului ceasornicului aflat în navă apare dilatată observatorului rămas pe cosmodrom; cu alte cuvinte pentru el ceasornicul de pe navă avansează mai încet, adică rămîne în urmă. De asemenea, pentru pilotul navei ceasornicul de pe cosmodrom rămîne în urmă.

Aceste considerații sînt adevărate pentru orice fenomen; de exemplu durata de dezintegrare a unei particule elementare instabile este caracteristică pentru particula în repaus adică față de sistemul propriu al particulei. Măsurată dintr-un alt sistem de referință, de exemplu din sistemul unui laborator, durata de dezintegrare apare dilatată, deoarece particula este în mișcare față de sistemul laboratorului. Cu cît particula se mișcă cu o viteză mai mare față de sistemul laboratorului, cu atît durata de dezintegrare măsurată din acest sistem va fi mai mare.

O consecință importantă a dilatării timpului este *relativitatea simultaneității*. Fie două evenimente A și B simultane în sistemul O, adică ele au avut loc la același timp, $t_1 = t_2$, dar în locuri diferite, x_1 și x_2. Conform transformărilor lui Lorentz, timpurile corespunzătoare în sistemul O', vor fi

$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1\right)$$

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2\right)$$

Se observă imediat că $t_2' \neq t_1'$ deoarece $x_1 \neq x_2$. Din această cauză se poate calcula o durată între evenimentele A și B față de sistemul O'. Deoarece $t_1 = t_2$

$$t_2' - t_1' = \gamma \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)$$

$$\Delta t' = \gamma \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \tag{4.11}$$

Prin urmare două evenimente simultane în sistemul O apar într-un alt sistem cu atît mai depărtate în timp ($\Delta t'$ mai mare) cu cît distanța geometrică

dintre locurile unde evenimentele se petrec este mai mare. Două evenimente simultane în sistemul O rămîn simultane și pentru sistemul O', numai dacă $x_1 = x_2$, adică dacă evenimentele se petrec în același punct al sistemului O.

Dilatarea timpului este una din cele mai dificile noțiuni la învățarea fizicii. Numai efectuarea multor exerciții și probleme poate ajuta la înțelegerea acestei consecințe a invarianței vitezei luminii.

Exemplu.

Particula μ, numită miuon, este o particulă instabilă, care se formează în păturile înalte ale atmosferei prin interacțiunea radiațiilor cosmice cu nucleele atomilor din atmosferă; ea se dezintegrează într-un electron și doi neutrini. Miuonii au fost detectați oriunde pe Pămînt la diferite altitudini, la nivelul mării și chiar la adîncimi destul de mari în oceane sau sub pămînt. Pentru înțelegerea celor ce urmează sînt suficiente aceste detalii. Intervalul de timp între formare și dezintegrare a fost determinat prin cîteva metode și s-a găsit $2 \cdot 10^{-6}$ s; aceasta ar fi durata de dezintegrare *statică*, măsurată față de sistemul propriu al particulei.

Viteza acestor particule în atmosferă este $v = 2{,}994 \cdot 10^8$ m/s sau 0,998 c ($\gamma = 16$). În timpul $2 \cdot 10^{-6}$ s miuonii ar parcurge distanța

$$2{,}994 \cdot 10^8 \times 2 \cdot 10^{-6} = 599 \text{ m}$$

în timp ce detectorii de miuoni trimiși în atmosferă au arătat că miuonii care ajung la suprafața Pămîntului se produc la altitudini mult mai mari, iar lungimile traiectoriilor lor sînt de peste 10 ori mai mari.

Această contradicție se poate înlătura aplicînd rezultatele invarianței einsteiniene. Durata de dezintegrare găsită experimental este $\Delta t'$ (durata statică) față de sistemul propriu al particulei, iar în sistemul Pămîntului durata cinematică, conform relației (4.10) este

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 16 \times 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Corespunzător acestui timp lungimea va fi

$$l = v\Delta t = 2{,}994 \cdot 10^8 \times 32 \cdot 10^{-6} = 9\,500 \text{ m}$$

care apare contractată în sistemul laboratorului din cauza factorului γ

$$l' = \frac{l}{\gamma} = \frac{9\,500}{16} = 599 \text{ m}$$

Din acest exemplu se vede că dilatarea timpului și contracția spațiului sînt două consecințe ale aceluiași fenomen: invarianța vitezei semnalelor electromagnetice.

4.6. Compunerea vitezelor

Invarianța einsteiniană modifică teorema de compunere a vitezelor. Forma stabilită în capitolul anterior este adevărată numai în limitele invarianței galileiene.

Se presupune un corp care se mișcă în sistemul O' în lungul axei $O'x'$ cu viteza relativă $\vec{w}$, față de acest sistem. Prin urmare viteza relativă $\vec{w}$ este coliniară cu viteza de transport $\vec{v}$ (figura 4.7). Dacă $x' = wt'$ este ecua-

ţia mişcării în sistemul O', atunci cu ajutorul transformărilor lui Lorentz se poate trece la ecuaţia mişcării în sistemul O

$$\gamma(x - vt) = w\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad x\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right) = (v + w)t;$$

$$\frac{x}{t} = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}$$

Viteza V a corpului faţă de sistemul O este $V = x/t$ şi are deci expresia

$$V = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \tag{4.12}$$

Viteza V are direcţia Ox, adică este coliniară cu viteza de transport v şi cu viteza relativă w. Aceasta este *teorema de compunere a vitezelor în invarianţa einsteiniană*. Se vede că pentru $\frac{v}{c} \to 0$ se ajunge la forma teoremei de compunere a vitezelor din mecanica galileiană: $V = v + w$.

În concluzie, se accentuează rezultatul foarte important că $V \to c$, atît pentru viteze de transport foarte mari ($v \to c$) cît şi pentru viteze relative foarte

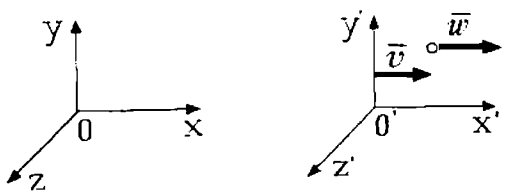


Fig. 4.7. Mişcarea relativă a unui corp în lungul axei $O'x'$ cu viteza $\vec{w}$.

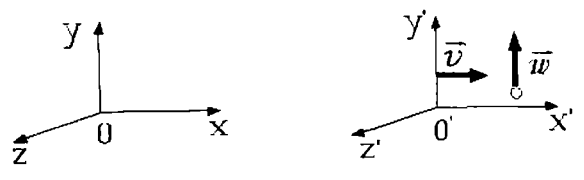


Fig. 4.8. Mişcarea relativă a unui corp în lungul axei $O'y'$ cu viteza $\vec{w}$.

mari ($w \to c$), cum rezultă din relaţia (4.12). Această concluzie este echivalentă cu aceea care afirmă că viteza c este o *viteză limită* care nu poate fi depăşită de vreun sistem inerţial sau de vreun corp în mişcare într-un sistem inerţial.

Un caz interesant de compunere a vitezelor este mişcarea relativă pe axa $O'y'$. Se consideră un corp care se deplasează în sistemul O' în lungul axei $O'y'$ cu viteza relativă $\vec{w}$, componenta pe $O'x'$ fiind nulă (fig. 4.8). Ecuaţia mişcării în sistemul O' este $y' = wt'$ şi, cu transformările lui Lorentz, se obţine ecuaţia mişcării în sistemul O

$$y = w\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = w\gamma t\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{x}{t}\right)$$

unde x este abscisa corpului faţă de sistemul O. Întrucît x/t este chiar viteza de transport v, se obţine

$$y = w\gamma t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \frac{y}{t} = w\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{w\gamma}{\gamma^2} = \frac{w}{\gamma}$$

Punînd $V = y/t$, viteza corpului față de sistemul O, rezultă

$$V = \frac{w}{\gamma} = w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.13}$$

În acest caz V are direcția axei Oy, fiind coliniară cu viteza relativă w. Se observă că la variația vitezei de transport v, V scade de la $V = w$ pentru $v = 0$ pînă la $V = 0$ pentru $v = c$. Expresia (4.13) este necesară pentru analiza relativității masei (§ 5.7).

Exemplu

Dacă de pe o navă care se deplasează cu o viteză foarte mare $v = \alpha c$ (α poate fi oarecare dar mai mic decît unitatea) se emite un semnal luminos, viteza luminii față de navă va fi, evident, $w = c$.

Pentru un observator de pe Pămînt, viteza acelui semnal luminos va fi după teorema de compunere a vitezelor (4.12)

$$V = \frac{\alpha c + c}{1 + \frac{\alpha c \cdot c}{c^2}} = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha} c = c$$

adică în concordanță cu principiul invarianței einsteiniene: lumina se propagă în vidul oricărui sistem inerțial cu viteza c.

4.7. Concluzie

Din cele de mai sus rezultă că, spre deosebire de ceea ce s-a obținut în cadrul invarianței galileiene, în invarianța einsteiniană spațiul și timpul sînt *relative* în sensul că *lungimea unui obiect sau durata unui fenomen depinde de sistemul din care se face măsurarea*. Această relativitate a spațiului și a timpului face ca invarianța einsteiniană să se numească *teoria relativității*; de studiul fenomenelor la viteze foarte mari cu considerarea invarianței vitezei luminii se ocupă „fizica relativistă", (de exemplu mecanică relativistă etc.).

Care este importanța practică a considerațiilor făcute mai sus? Aparent această teorie nu este aplicabilă la scara terestră, deoarece în practică se întîlnesc viteze mici față de viteza luminii. Teoria relativității are o mare importanță în studiul și aplicațiile particulelor elementare care se mișcă de obicei cu viteze mai mult sau mai puțin apropiate de viteza luminii.

Totuși, în ultimul timp aceste considerații s-au extins într-un domeniu de mare viitor: astronautica. Dacă astăzi vitezele navelor cosmice sînt mici ($\sim$ 10 km/s), în viitor aceste nave vor trebui să aibă viteze mult mai mari pentru a putea ajunge în timpuri rezonabile (față de viața unui om) la planetele mai depărtate din sistemul solar, la steaua cea mai apropiată (Proxima Centauri) și ulterior la galaxia vecină (galaxia din Andromeda). Cinematica arată că se poate realiza o viteză oricît de mare dacă accelerația, fie oricît de mică, acționează un timp suficient de lung. De exemplu, dacă o

Tabelul 4.2

Timpul t, față de Pămînt, dus și întors cu staționare la țintă, și timpul t' față de navă, pentru cîteva călătorii cosmice în funcție de viteza de deplasare a navei

Ținta călătoriei	Distanța	Viteza de deplasare	Timpul t ani	γ	Timpul t' ani	Posibilitatea călătoriei
	km					
Luna	$\sim 4.10^5$	13 km/s	$\sim$0,02	1	0,02	Posibilă
Venus, Marte	min 5.10^7	20 km/s	$\sim$1	1	1	Posibilă
Pluton	6.10^9	20 km/s	40	1	40	Imposibilă
		100 km/s	4	1	4	Posibilă
	ani-lumină					
Proxima-Centauri	4,3	100 km/s	25 000	1	25 000	Imposibilă
		0,5 c	17	1,15	15	Posibilă
Andromeda	2.10^6	0,5 c	8.10^6	1,15	7.10^6	Imposibilă
(galaxia vecină)		$(1-10^{-11})$ c	4.10^6	2.10^5	20	Posibilă

rachetă ar avea suficient combustibil ca să-și păstreze o accelerație egală cu accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului (9,81 m/s^2), ar putea atinge viteza 0,5 c $= 1{,}5 \cdot 10^8$ m/s în timpul

$$t = \frac{1{,}5 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ s} = 0{,}5 \text{ a}$$

adică o jumătate de an (!). Acest timp este enorm pentru tehnica actuală, dar generațiilor viitoare se va impune obținerea unor durate mari de accelerare a navelor cosmice, pentru a atinge vitezele necesare călătoriilor la limita sistemului solar și în afara lui. Din distanța la ținta unei asemenea călătorii și viteza de deplasare de care se va dispune rezultă durata t a călătoriei față de Pămînt. Această durată include timpul de drum, dus și întors, precum și o staționare minimă la țintă; durata staționării depinde de scopul călătoriei și anume de cercetările care trebuie executate. Durata t, așa cum este dată în tabelul 4.2 pentru cîteva călătorii, este *durata cinematică* deoarece este măsurată de un observator de pe Pămînt, adică dinafara sistemului navei.

Durata statică t', față de navă, dată în tabelul 4.2, este

$$t' = t/\gamma$$

Durata statică este funcție de factorul γ, adică de viteza v care trebuie să i se imprime navei. Energia necesară pentru imprimarea acestei viteze nu interesează aici; ea va fi analizată în § 9.7.

Durata statică t' stă astăzi la baza discuțiilor pentru proiectele de viitor ale călătoriilor cosmice, deoarece ea ar stabili posibilitatea principială a unei asemenea operații. Pentru ca o călătorie cosmică să fie în principiu posibilă, se consideră astăzi că durata statică a sa trebuie să fie mai mică decît durata de viață a unui om!

Capitolul **5**

Legile dinamicii

5.1. Experimente fundamentale

După geometrie și cinematică, dinamica completează edificiul fizicii cu legile sale fundamentale. Observațiile experimentale ale lui Galilei și în special cele ale lui Newton stau la baza stabilirii legilor dinamicii numite legile lui Newton. Dinamica studiază cauzele mișcării corpurilor, mai precis cauzele trecerii unui corp din starea de repaus în starea de mișcare și invers, sau ale trecerii de la un tip de mișcare la altul. Observînd natura înconjurătoare, se constată că aceste cauze sînt datorate diferitelor interacțiuni între corpuri, iar cea mai simplă interacțiune este ciocnirea; prin ciocnirea a două corpuri starea lor de mișcare se schimbă. De aceea se va începe studiul dinamicii cu analiza cîtorva ciocniri, așa cum rezultă din experimente simple.

Ciocnirea elastică și ciocnirea plastică. Două bile, confecționate una din oțel și cealaltă din plastilină, sînt lăsate să cadă, de la o anumită înălțime pe un plan orizontal foarte rigid, de exemplu din oțel. Se constată că după ciocnire, bila din oțel se ridică față de plan, aproximativ la înălțimea dela care a căzut, pe cînd bila din plastilină rămîne pe plan, suferind evident o anumită deformare permanentă. Observarea acestui fenomen din natură conduce la definirea celor două cazuri limită de ciocnire: *ciocnirea elastică* și *ciocnirea plastică*; ultima se mai numește ciocnire neelastică.

În cele de mai sus s-au definit cazurile limită de ciocnire; în practică se întîlnesc și cazuri intermediare și anume ciocnirea aproape elastică sau ciocnirea aproape plastică. În cele ce urmează se vor studia numai cazurile limită de ciocniri.

Descrierea celor două tipuri de ciocniri. În experimentele de mai jos, ale căror rezultate vor conduce la stabilirea legilor dinamicii, se vor folosi bile cu aceeași cantitate de substanță, adică cu mase egale. Fără a recurge la legile dinamicii se știe că cu ajutorul balanței se pot alege corpuri la fel de masive, adică cu masele egale.

În experimentul *A* se realizează ciocnirea a două bile din oțel (ciocnire elastică), cu masele egale, care se îndreaptă una către cealaltă pe aceeași direcție, cu aceeași viteză *V* față de un sistem de referință *O* presupus fix. Prin observarea fenomenului ciocnirii, se constată că după ciocnire cele două bile își schimbă sensurile de mișcare, păstrîndu-se însă valoarea vitezei *V* pentru fiecare din bile (fig. 5.1). În experimentul *B* are loc ciocnirea a două bile plastice, egale ca masă, care se mișcă la fel ca bilele din experimentul *A*. Se observă că după ciocnire bilele rămîn „lipite" una de alta cu viteza finală nulă ($V = 0$), după cum se vede în figura 5.1.

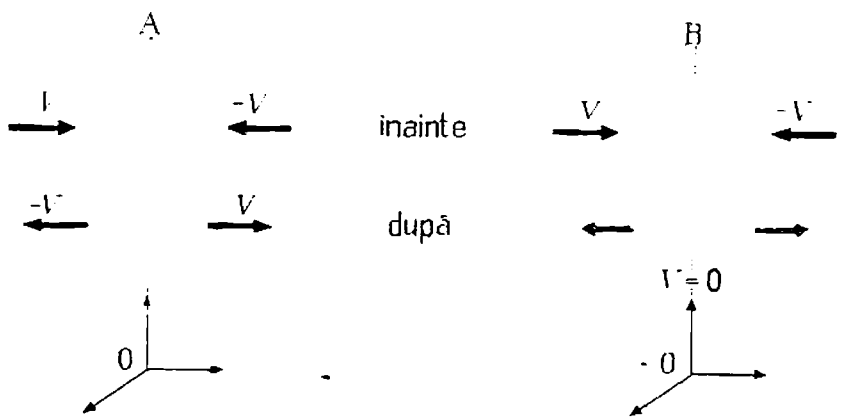


Fig. 5.1. Ciocnirea elastică (*A*) și ciocnirea plastică (*B*) a două bile la fel de masive, observate din sistemul de referință *O*; înainte = înainte de ciocnire, după = după ciocnire

Descrierea celor două experimente se poate face și dintr-un sistem inerțial *O'*. Sistemul *O'* se deplasează față de sistemul *O* în același fel ca bila *1* înainte de a se ciocni, adică sistemul *O'* are viteza de transport $v = V$. Nu se poate spune că sistemul ales este legat de bilă, deoarece după ciocnire viteza bilei *1* se schimbă și sistemul nu ar mai fi inerțial; dacă viteza sistemului este *V* atît înainte, cît și după ciocnirea bilelor atunci sistemul este inerțial. Se notează cu w_1 și respectiv w_2, vitezele relative ale celor două bile față de sistemul inerțial *O'* și cu V_1, respectiv V_2 vitezele celor două bile față de sistemul *O* presupus fix. Datorită modului în care au fost alese vitezele bilelor se poate scrie

$$V_1 = V \qquad V_2 = -V$$

atît în experimentul *A* cît și în experimentul *B*.

Aplicînd teorema de compunere a vitezelor, se obțin vitezele relative w_1 și respectiv w_2, față de sistemul *O'*, ale celor două bile, în ambele experimente

$$w_1 = V_1 - v = V - V = 0$$

$$w_2 = V_2 - v = -V - V = -2V$$

Prin urmare, bila *1* este în repaus față de sistemul *O'*, iar bila *2* se mișcă cu viteza $-2V$ față de acest sistem (fig. 5.2).

După ciocnirea elastică (experimentul *A*) vitezele celor două bile față de sistemul *O* sînt

$$V_1 = -V \qquad V_2 = V$$

iar vitezele relative ale bilelor, calculate cu ajutorul teoremei de compunere a vitezelor, vor fi

$$w_1 = V_1 - v = -V - V = -2V$$

$$w_2 = V_2 - v = V - V = 0$$

Aceasta înseamnă că bila *1* se mişcă cu viteza $-2V$ faţă de sistemul O', iar bila *2* rămîne în repaus faţă de sistemul O'.

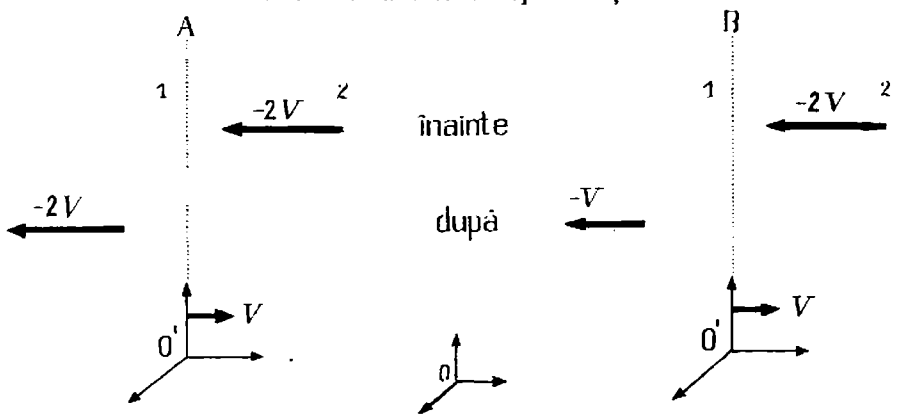


Fig. 5.2. Ciocnirea elastică (*A*) şi ciocnirea plastică (*B*) a două bile la fel de masive, observate din sistemul de referinţă O' caracterizat prin viteza de transport $v = V$, faţă de sistemul O; înainte = înainte de ciocnire, după = după ciocnire

În experimentul *B*, după ciocnirea plastică, cele două bile „lipite" au viteza nulă faţă de sistemul $O(V = 0)$; viteza relativă faţă de sistemul O' fiind

$$w = V - v = 0 - V = -V$$

Prin urmare cele două bile lipite se mişcă în sistemul O' cu viteza $-V$, adică jumătate din valoarea vitezei bilei *2* înainte de ciocnire. Rezultatele obţinute pentru sistemul inerţial O' sînt redate în figura 5.2.

Conform principiului invarianţei, galileiene sau einsteiniene, rezultatele obţinute în sistemul inerţial care se mişcă cu viteza de transport $v = V$ sînt adevărate pentru orice alt sistem inerţial, deoarece legile fizicii şi deci şi cele ale ciocnirilor studiate sînt aceleaşi în diferitele sisteme inerţiale. Prin urmare şi în sistemul inerţial cu viteza de transport $v = 0$, cele două experimente se vor desfăşura aşa cum sînt descrise de observatorul din sistemul O'. Dacă acest observator rămîne în repaus, iar bilele îşi păstrează aceleaşi viteze faţă de sistemul inerţial ca acelea din figura 5.2, el va constata două alte experimente de ciocnire A' şi B', aşa cum ele sînt arătate în figura 5.3. Este important de subliniat că experimentele A' şi B' din figura 5.3 diferă de experimentele *A* şi *B* din figura 5.1.

În experimentele A' şi B', bila *1* este în repaus înainte de ciocnire, iar bila *2* se îndreaptă spre bila *1* cu viteza $-V$. După ciocnirea elastică, bila *2* rămîne în repaus, iar bila *1* se deplasează cu viteza $-V$, adică cu viteza dinainte de ciocnire, a bilei *2*, preluînd atît valoarea cît şi sensul vitezei respective. După ciocnirea plastică, cele două bile „lipite" se deplasează cu jumătate din viteza bilei *2*, în sensul de mişcare pe care această bilă îl avea înainte de ciocnire.

În rezumat, în acest paragraf s-a pornit de la observarea experimentală a unei ciocniri elastice şi a unei ciocniri plastice. Vitezele finale, după cioc-

nire, redate în figura 5.1, sînt obţinute prin măsurare. Apoi, prin aplicarea teoremei de compunere a vitezelor s-au calculat vitezele finale, aşa cum ar fi aceste viteze determinate de către un observator dintr-un sistem inerţial O' în mişcare faţă de sistemul O (fig. 5.2). În fine, pe baza principiului invarianţei, s-au stabilit alte două experimente A' şi B' (fig. 5.3) fără a mai fi necesar să se recurgă la observarea experimentală.

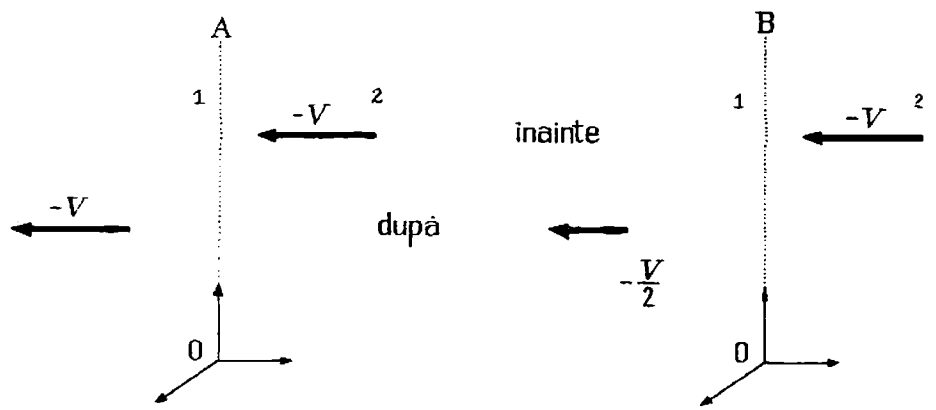


Fig. 5.3 Ciocnirea elastică (A') şi ciocnirea plastică (B') a două bile la fel de masive, din care una este iniţial în repaus, observate din sistemul de referinţă O.

Cum se pot caracteriza cantitativ ciocnirile descrise? Pentru cele patru experimente: A, B, A' şi B' se scriu produsele dintre masa şi viteza bilei, pentru fiecare bilă, o dată înainte de ciocnire şi apoi după ciocnire:

	înainte		*după*	
	bila *1*	bila *2*	bila *1*	bila *2*
A :	$+ mV$	$- mV$	$- mV$	$+ mV$
B :	$+ mV$	$- mV$	0	0
A':	0	$- mV$	$- mV$	0
B':	0	$- mV$	$- 2m \frac{V}{2}$	

Din analiza expresiilor astfel obţinute, se ajunge la concluzia următoare:

În orice sistem inerţial şi pentru orice tip de ciocnire, elastică sau plastică, suma produselor mV înainte de ciocnire este egală cu suma produselor mV după ciocnire.

5.2. Legea conservării impulsului

Exprimarea primei legi a dinamicii se bazează pe observarea experimentală a ciocnirilor, aşa cum s-a făcut în paragraful anterior. Folosind *impulsul* unui corp, definit ca produsul între masa şi viteza sa,

$$p \equiv mV$$

pe baza concluziei § 5.1, prima lege a dinamicii este:

În orice sistem inerțial, pentru două sau mai multe corpuri care se ciocnesc, suma impulsurilor înainte de ciocnire este egală cu suma impulsurilor după ciocnire

$$(\Sigma p)_{\text{înainte}} = (\Sigma p)_{\text{după}} \tag{5.1}$$

Această lege se mai poate enunța: *în orice sistem inerțial, impulsul total al corpurilor care se ciocnesc se conservă.*

Cele două sau mai multe corpuri care se ciocnesc formează un sistem de corpuri care interacționează între ele și nu au vreo interacțiune cu un alt corp. Pentru precizarea acestui fapt, sistemul de corpuri pentru care se exprimă legea conservării impulsului se numește *sistem închis*. Cu această noțiune legea conservării impulsului se exprimă astfel: *în orice sistem inerțial, impulsul total al corpurilor dintr-un sistem închis se conservă.*

Cînd mișcarea celor două corpuri se face pe aceeași direcție, adică în cazul unei *ciocniri centrice* a două corpuri de masă m_1 și respectiv m_2 (vitezele corpurilor au aceeași direcție atît înainte de ciocnire cît și după ciocnire), legea conservării impulsului se poate scrie

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V'_1 + m_2V'_2 \tag{5.2}$$

unde V_1 și V_2 sînt vitezele înainte de ciocnire iar V'_1 și V'_2 sînt vitezele după ciocnire. Dacă m_1, m_2, V_1 și V_2 din ecuația de mai sus sînt cunoscute nu se pot determina vitezele după ciocnire, V'_1 și respectiv V'_2. Pentru rezolvarea problemei mai este necesară încă o ecuație dată de legea conservării energiei (vezi § 9.5).

Legea conservării impulsului sub forma cea mai generală se exprimă vectorial. În cazul a două corpuri care se ciocnesc sub un anumit unghi (direcțiile de mișcare sînt diferite: *ciocnire necentrică*) se scrie

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \tag{5.3}$$

$\vec{p}_1$ și $\vec{p}_2$ fiind impulsurile înainte de ciocnire, iar $\vec{p}'_1$ și $\vec{p}'_2$ fiind impulsurile după ciocnire (figura 5.4).

Relația (5.3) se poate explicita sub forma

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2$$

Legea conservării impulsului se mai exprimă și sub o formă care va interesa în cele ce urmează. Ecuația (5.3) se poate scrie astfel

$$\begin{gathered} \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2) \\ \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \end{gathered} \tag{5.4}$$

Rezultă de aici că variația impulsului pentru primul corp este egală cu variația impulsului, cu semn schimbat, pentru cel de-al doilea corp; aceasta înseamnă că, impulsul cîștigat de un corp în urma unei interacțiuni este egal cu impulsul pierdut de celălalt corp. De exemplu, în experimentul *A* din § 5.1, variația impulsului pentru bila *1* este $\Delta p_1 = -mV - mV = -2mV$, iar pentru bila *2* este $\Delta p_2 = mV - (-mV) = 2\ mV$.

Legea conservării impulsului explică o serie de fenomene din multe domenii ale fizicii de la mișcarea corpurilor cerești pînă la mișcarea particulelor elementare. În aplicațiile practice se întîlnesc două categorii de fenomene unde se aplică legea conservării impulsului. În prima categorie, cazul a două

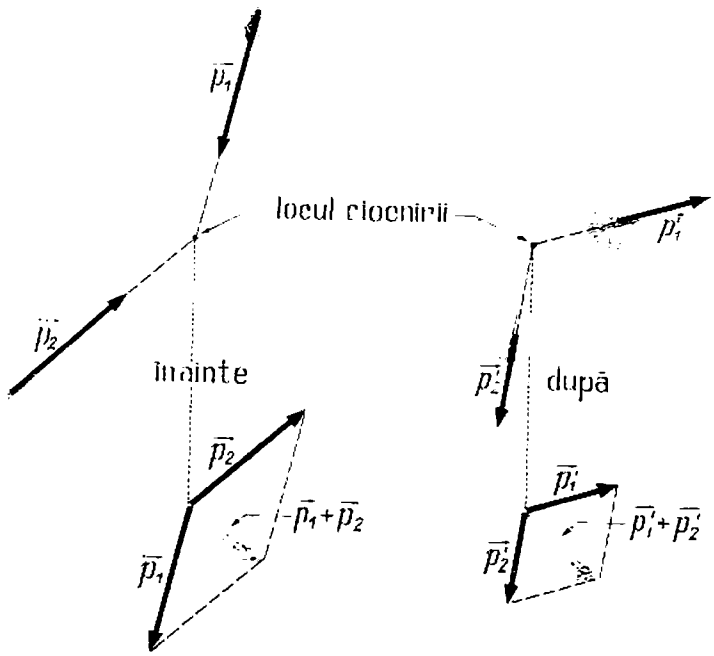


Fig. 5.4. Schema vectorilor impuls pentru două corpuri care se ciocnesc elastic.

corpuri care se ciocnesc, legea se scrie așa cum s-a arătat mai înainte. În cea de-a doua categorie, avem de-a face cu cazul unui corp inițial în repaus, care se „fragmentează" sau se „separă" ulterior în alte două corpuri; de exemplu aruncarea proiectilului din tun prin explozie sau aruncarea unui obiect masiv de către om pe care el îl ținea în brațe. Corpul inițial, tunul cu proiectilul sau omul cu obiectul masiv, are impulsul zero, dar ulterior, prin explozie sau prin aruncare, apar în fiecare caz cîte două corpuri: proiectilul și țeava tunului, sau omul și obiectul masiv. Dacă cele două „fragmente" au masele m' și m'' și vitezele finale V' și V'', legea conservării impulsului se scrie

$$m'V' = m''V'' \tag{5.5}$$

deoarece inițial impulsul total era zero.

Un caz asemănător de „separare" este racheta propulsată prin ejectarea gazelor, care va fi studiată în § 5.5. De asemenea se mai poate cita exemplul ieșirii cosmonautului din cabină, în condițiile mișcării pe o orbită fixă în jurul Pămîntului. Cele două fragmente (cosmonautul și cabina) trebuie să aibă impulsuri egale și de semn contrar. Dacă cosmonautul s-ar folosi de cabină ca să se „împingă" în spațiu, cabina ar primi un impuls și și-ar modifica traiectoria, lucru nedorit pentru întoarcerea pe Pămînt. Ca urmare, ieșirea din cabină și plecarea de lîngă cabină trebuie să se facă cu un impuls neglijabil.

Notă.

Legea conservării impulsului se aplică la interacţiunea a două corpuri. După cum s-a văzut în consideraţiile anterioare s-a recurs la cele mai simple interacţiuni: ciocnirea sau fragmentarea unui corp prin aruncare sau explozie. În general, interacţiune înseamnă acţiunea unui corp asupra altui corp datorită unui anumit tip de forţe. De exemplu, la ciocnire intervin forţele elastice, iar la alte tipuri de interacţiuni intervin forţele electromagnetice, gravitaţionale sau nucleare. O interacţiune simplă este şi sprijinirea unui corp pe altul în cîmpul gravitaţional, la care se va face apel mai departe.

Efectul unei interacţiuni este modificarea stării de repaus sau de mişcare; modificarea stării de mişcare poate fi oprirea, schimbarea direcţiei sau modificarea mărimii vitezei. Se poate aminti de exemplu, mişcarea unei sarcini electrice pozitive spre o altă sarcină pozitivă (fig. 5.5, *a*). Dacă direcţiile lor de mişcare coincid, datorită forţei electrice coulombiene, sarcinile electrice în mişcare sînt frînate şi întoarse înapoi.

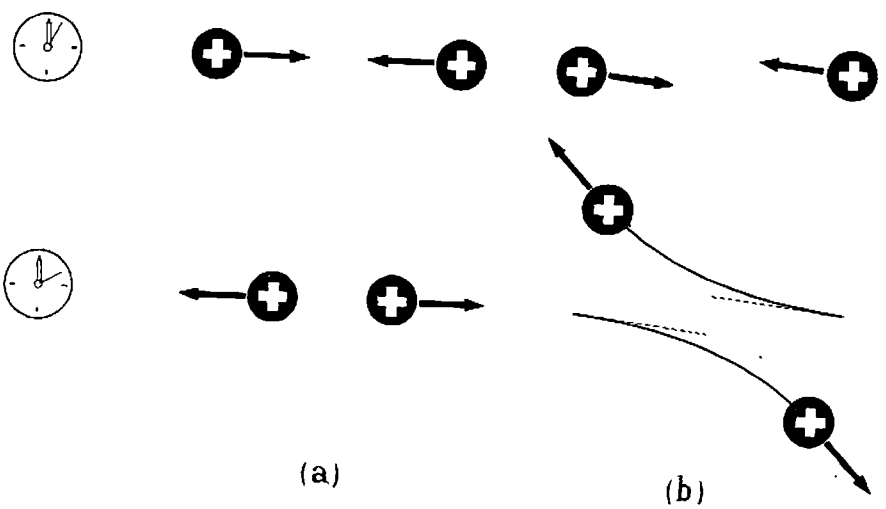


Fig. 5.5. Interacţiunile între două sarcini electrice pozitive analoge unor ciocniri; (*a*) direcţia de mişcare aceeaşi, (*b*) direcţiile de mişcare diferite. Ceasornicele arată timpuri succesive şi anume înainte de timpul apropierii maxime între sarcini şi respectiv, după acest timp.

Dacă direcţiile de mişcare ale celor două sarcini electrice nu sînt aceleaşi, mişcarea are loc aşa cum se arată în figura 5.5, *b*. Aceste interacţiuni sînt analoge ciocnirilor. Mai tîrziu, în studiul particulelor elementare se vor întîlni alte interacţiuni: ionizarea, efectul fotoelectric, efectul Compton etc. Tuturor acestor interacţiuni li se aplică legea conservării impulsului.

5.3. Legea inerţiei şi legea forţei

Legea inerţiei. Din prima lege a dinamicii rezultă că dacă un corp nu interacţionează cu alte corpuri, impulsul său trebuie să rămînă constant în timp

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0; \vec{p} = const \qquad (5.6)$$

Pentru un corp în mișcare, avînd masa constantă, faptul că impulsul este constant înseamnă că viteza lui — vectorială — este constantă, adică acest corp are o mișcare rectilinie și uniformă. Astfel un corp ajuns în spațiul extragalactic, unde nu este supus nici unei interacțiuni, își păstrează nedefinit mișcarea rectilinie și uniformă. În cazul particular, cînd $\vec{v} = 0$, corpul este în repaus și rămîne în repaus atît timp cît nu suferă vreo interacțiune.

Conform considerațiilor făcute legea inerției se enunță:

În lipsa unei interacțiuni, un corp își păstrează nedefinit starea de mișcare rectilinie și uniformă sau starea de repaus, față de orice sistem inerțial.

Pe Pămînt, un corp nu își poate păstra timp nedefinit mișcarea rectilinie și uniformă, fără nici o interacțiune care să-i producă mișcarea, deoarece nu poate fi sustras unei interacțiuni de neînlăturat: *frecarea*, al cărei efect final este oprirea corpului.

Legea forței. Datorită unei interacțiuni, impulsul unui corp nu rămîne constant în timp, el suferă o variație: $d\vec{p}/dt \neq 0$. Această derivată în raport cu timpul care este diferită de zero este cauza modificării stării de mișcare sau a stării de repaus. Derivata impulsului în raport cu timpul se numește prin definiție forța $\vec{F}$

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Prin explicitatea impulsului, expresia forței devine

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{5.7}$$

unde a apărut $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ accelerația corpului. În relația (5.7) s-a considerat că masa corpului este constantă așa cum se face în mecanica newtoniană. Prin urmare, variația impulsului unui corp care apare la o interacțiune, conduce la accelerarea corpului așa cum arată relația (5.7). Forța este un vector obținut prin derivarea vectorului impuls în raport cu timpul și este dat de produsul între masă și accelerație. Accelerația este de asemenea un vector și are aceeași direcție și același sens cu forța.

Legea forței se poate enunța astfel:

Variația impulsului în timp, adică forța, este egală cu produsul între masa corpului și accelerația față de sistemul inerțial în care se măsoară impulsul corpului.

Natura forței $\vec{F}$ este impusă de natura interacțiunii; pentru o sarcină electrică care interacționează cu un cîmp electric, forța este electrică (coulombiană). În cazul unei mase care interacționează gravitațional, adică cu cîmpul altei mase, forța este gravitațională și așa mai departe. La o interacțiune, apare o forță dată de derivata impulsului, forță care produce modificarea mișcării; modificarea mișcării este caracterizată cantitativ printr-o accelerație. În afara *forțelor de cîmp*, unui corp i se poate imprima, de asemenea, printr-o explozie sau cu ajutorul unui motor, o forță care se numește *forță imprimată*. Datorită acestei forțe motorul accelerează vehiculul respectiv (automobil, vapor, avion etc.). În cazul în care corpul care se mișcă accelerat iese de sub acțiunea forței, corpul se mișcă cu impulsul constant, așa cum afirmă legea inerției.

În cazul mișcării circulare chiar dacă viteza pe traiectorie este constantă, cinematica afirmă că trebuie să existe o accelerație centripetă. Din punct de vedere dinamic accelerația centripetă se datorește unei forțe care menține corpul pe traiectoria circulară; aceasta este *forța centripetă*.

Forța centripetă poate fi o forță de cîmp, gravitațională ca în cazul mișcării Pămîntului în jurul Soarelui, sau electrică, ca în cazul mișcării electronului în jurul nucleului atomului. Forța centripetă poate fi și o forță imprimată de către un motor.

În cazul ciocnirii unei bile cu un perete, forța care acționează asupra bilei este de natură *elastică* și este dată de variația impulsului bilei în timpul ciocnirii, așa cum se va arăta în continuare.

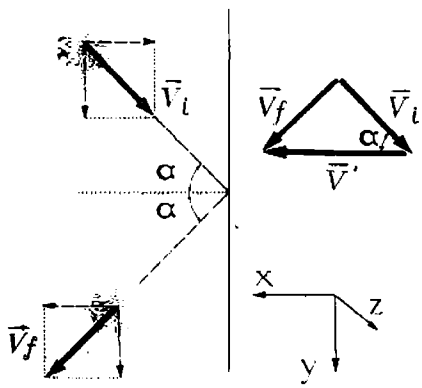


Fig. 5.6. Reprezentarea grafică a vectorilor viteză la ciocnirea oblică a unei bile cu un perete. S-a ales sistemul de coordonate în care forța care acționează asupra bilei este pozitivă

Aplicație.

Să calculăm forța care acționează asupra unei bile la ciocnirea sa cu un perete. Fie $p = mV$ impulsul bilei înainte de ciocnire. Se va considera în primul rînd *ciocnirea dreaptă*, adică vectorul viteză este perpendicular pe perete. La ciocnirea elastică impulsul înainte de ciocnire este $p_i = -mV$ iar după ciocnire este $p_f = +mV$, recurgînd la sistemul de coordonate din figura 5.6, ceea ce înseamnă că variația impulsului bilei (se poate lucra scalar deoarece vectorii sînt coliniari) este

$$\Delta p = p_f - p_i = mV - (-mV) = 2mV$$

iar forța

$$F' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mV}{\Delta t} \tag{5.8}$$

Δt este timpul ciocnirii, o mărime care este destul de greu de determinat fiind funcție de elasticitatea bilei și a peretelui. La ciocnirea plastică impulsul după ciocnire este nul, (bila rămîne pe perete) ceea ce conduce la $\Delta p = p_f - p_i = 0 - (-mV) = mV$ și deci

$$F'' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mV}{\Delta t} = \frac{F'}{2} \tag{5.9}$$

În al doilea rînd se va considera *ciocnirea oblică*, cînd viteza bilei face un anumit unghi cu peretele. Fie $\vec{V}_i$ vectorul care reprezintă viteza inițială și $\vec{V}_f$ viteza finală, după cum se vede în figura 5.6; s-a notat cu α unghiul între viteză și normala la perete. Se constată experimental că la ciocnirea oblică elastică, unghiul α rămîne constant după ciocnire și viteza finală este egală cu viteza inițială. Variația impulsului este

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m(\vec{V}_f - \vec{V}_i) = m\vec{V}'$$

unde $\vec{V}'$ este vectorul diferență, al cărui modul se calculează cu ajutorul triunghiului isoscel din schema vectorilor dată în figura 5.6.

$$|\vec{V}'| = 2\ V_i \cos\alpha$$

Vectorul diferență $\vec{V}'$ este întotdeauna, adică pentru orice unghi α, normal la perete. Introducînd vectorul unitate $\vec{n}$, care este normal la perete, se poate scrie

$$\vec{V}' = \vec{n}\,|\vec{V}'| = 2\ V_i \cos\alpha\ \vec{n}$$

și deci, expresia forței la ciocnirea elastică oblică este

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{V}'}{\Delta t} = \frac{2mV_i\cos\alpha}{\Delta t}\vec{n} \tag{5.10}$$

Aceasta înseamnă că pentru orice unghi α, forța $\vec{F}$ care acționează asupra bilei este perpendiculară la perete, iar mărimea sa este cu atît mai mică cu cît unghiul α este mai mare. Introducînd componenta normală a vitezei, $V_n = |\vec{V}_i| \cos \alpha$, se poate scrie scalar și vectorial

$$F = \frac{2mV_n}{\Delta t}; \quad \vec{F} = \frac{2mV_n}{\Delta t}\vec{n}$$

Aceasta se poate interpreta ușor dacă se descompune impulsul în două componente: o componentă normală și una longitudinală față de perete. În cazul ciocnirii oblice, componenta normală a impulsului mV_n își schimbă sensul, pe cînd componenta longitudinală a impulsului, rămîne nemodificată. Forța $\vec{F}$ se poate obține din variația componentei normale a impulsului $2mV_n$, deoarece variația componentei longitudinale este egală cu zero. Prin urmare, la ciocnirea oblică forța $\vec{F}$ este totdeauna perpendiculară pe perete.

Considerațiile făcute aici au nenumărate aplicații atît în mecanică, cît și în fizica atomică și nucleară.

5.4. Teorema acțiunii și reacțiunii

Teorema acțiunii și reacțiunii este o consecință a legii inerției și a legii forței. Pentru deducerea acestei teoreme se consideră interacțiunea a două corpuri, care nu sînt supuse nici unei alte acțiuni exterioare.

Interacțiunea celor două corpuri poate fi una comună: un corp se sprijină pe altul în cîmpul gravitațional, sau una mai puțin comună: două mase sînt supuse numai acțiunii forțelor lor gravitaționale; cele două cazuri sînt arătate în figura 5.7. Dacă impulsurile celor două corpuri sînt $\vec{p}_1$ și $\vec{p}_2$ și nu are loc nici o altă interacțiune, impulsul total $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ trebuie să fie constant la orice timp

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

Derivatele respective reprezintă forțele, și anume, forța F_1 care acționează asupra primului corp (derivata impulsului p_1) se datorește celui de-al doilea corp, iar forța F_2 care acționează asupra celui de-al doilea corp (derivata impulsului p_2) se datorește primului corp. Prin urmare

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad \text{sau} \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{5.11}$$

La interacțiunea a două corpuri, forța care acționează asupra unui corp (acțiunea) este egală și de sens contrar cu forța care acționează asupra celuilalt corp (reacțiunea). Cele două forțe, F_1 și F_2, au în fiecare caz, punete de aplicație diferite, așa cum se observă în figura 5.7 pentru două tipuri de interacțiuni.

În fine, în exemplul ciocnirii unei bile de un perete, s-a calculat în § 5.3 forța care acționează asupra bilei la ciocnire. Conform teoremei acțiunii și reacțiunii și asupra peretelui va acționa o forță egală și de sens contrar; aceasta este reacțiunea bilei asupra peretelui. În cele ce urmează se vor aplica aceste considerații în cazul unui obiect care se găsește sub acțiunea vîntului. Mole-

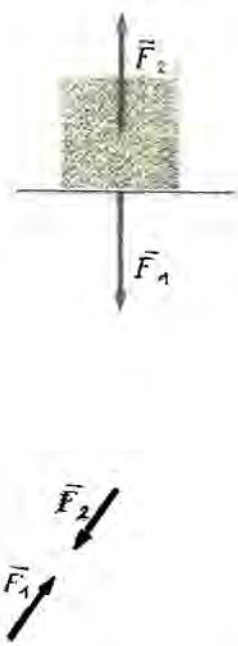


Fig. 5.7. Exemplificarea teoremei acțiunii și reacțiunii în două tipuri de interacțiuni.

culele din aer se ciocnesc de suprafaţa obiectului ca şi bilele de un perete. Datorită acţiunii obiectului asupra moleculelor din aer, apare o reacţiune a vîntului asupra suprafeţei obiectului. *Reacţiunea vîntului* depinde de viteza vîntului, conform relaţiilor stabilite în § 5.3 şi poate atinge valori mari. Constructorii ţin seama de reacţiunea vîntului asupra unei construcţii în proiectare.

De asemenea, mişcarea navelor cu pînze se datoreşte reacţiunii vîntului asupra pînzei. Forţa care acţionează asupra moleculelor din aer este totdeauna perpendiculară pe pînză, independent de unghiul sub care bate vîntul pe pînză, aşa cum s-a arătat în § 5.3. Rezultă că reacţiunea vîntului asupra pînzei este de asemenea *perpendiculară pe pînză*, independent de direcţia vîntului, iar mişcarea navei se datoreşte acestei reacţiuni, numită de acum încolo *forţa vîntului*.

5.5. Propulsarea rachetei

Propulsarea rachetei este o aplicaţie a conservării impulsului. Înainte de lansarea rachetei impulsul este nul. Prin aprinderea motorului rachetei, gazele arse sînt ejectate cu viteză mare, iar racheta se deplasează în sens invers ejectării gazelor pentru a compensa impulsul gazelor. Impulsul total dat de suma între impulsul rachetei şi impulsul gazelor, dacă se neglijează acţiunea forţelor exterioare, păstrează valoarea iniţială adică rămîne zero.

Propulsarea rachetei prin ejectarea gazelor se deosebeşte ca mod de deplasare în spaţiu, de sistemul de deplasare al celorlalte vehicule. De exemplu, automobilul, avionul sau vaporul se deplasează pe baza unei *interacţiuni cu mediul înconjurător* şi anume solul pentru automobil, aerul pentru avion şi apa pentru vapor. Printr-o astfel de interacţiune un vehicul exercită o forţă — acţiunea — asupra mediului pe care, sau în care, se găseşte; mediul prin reacţiunea sa — egală şi de sens opus cu acţiunea — împinge vehiculul într-o anumită direcţie. Deplasarea rachetei nu se bazează pe nici un fel de interacţiune cu mediul înconjurător. Într-adevăr racheta se deplasează prin ejectarea gazelor şi în spaţiul vid, unde nu există nici un alt corp cu care ar putea interacţiona.

Prin aplicarea legii conservării impulsului se poate determina viteza realizată de rachetă ca urmare a ejectării unei mase de gaz. Fie m_0 masa iniţială a rachetei; o parte importantă a acestei mase, între 90% şi 98% este masa propulsantului format din carburant şi comburant. Prin ejectarea gazelor masa rachetei scade continuu; în intervalul de timp dt racheta aruncă masa dm de gaz cu viteza u faţă de sistemul rachetei. În acelaşi timp, dt, viteza v a rachetei variază cu dv, încît impulsul cîştigat de rachetă este $m\,dv$, iar impulsul pierdut prin aruncarea gazelor este $u\,dm$ (figura 5.8). Întrucît la timpul iniţial impulsul total al sistemului era zero, la un moment ulterior în timpul lansării se poate scrie

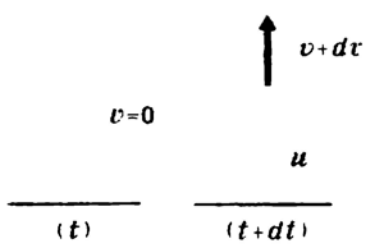


Fig. 5.8. La momentul $t + dt$ de la începutul lansării variaţia impulsului rachetei este $m\,dv$, iar variaţia impulsului gazelor este $-u\,dm$.

$$m\,dv = -u\,dm; \qquad dv = -u\frac{dm}{m} \tag{5.12}$$

Se presupune că viteza u de ejectare a gazelor este constantă, ceea ce reprezintă o aproximaţie destul de bună.

Relaţia (5.12) trebuie integrată de la viteza iniţială a rachetei, $v = 0$, la viteza finală, v, a rachetei şi de la masa iniţială a rachetei, m_0, pînă la masa finală m. Masa finală m este masa rachetei rămasă după consumarea propulsantului. În acest fel se obţine

$$\int_0^v dv = -u \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -u \ln m \Big|_{m_0}^{m}$$

$$v = u (\ln m_0 - \ln m) = u \ln \frac{m_0}{m} \qquad (5.13)$$

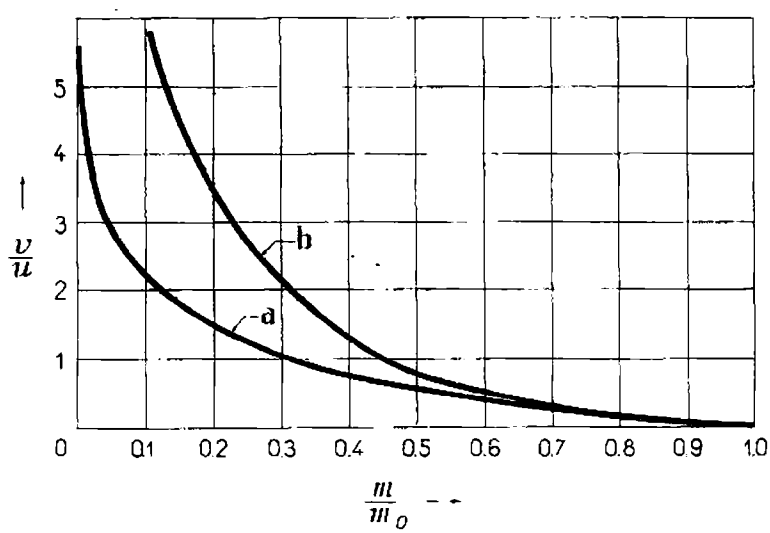


Fig. 5.9. Dependenţa raportului dintre viteza rachetei v şi viteza gazelor u, de raportul dintre masa finală m a rachetei şi masa sa iniţială m_0 în două cazuri: *a*) ejectarea continuă a propulsantului, relaţia (5.13), *b*) ejectarea instantanee a propulsantului prin explozie, relaţia (5.14).

Viteza finală v a rachetei este direct proporţională cu viteza de ejectare u a gazelor şi cu logaritmul natural al raportului dintre masa iniţială m_0 şi masa finală m a rachetei. Racheta a atins viteza finală v la sfîrşitul duratei necesare pentru consumarea masei $m_0 - m$ a propulsantului. Este interesant să se compare viteza finală realizată prin ejectarea continuă a gazelor cu aceea obţinută printr-o explozie, în care aceeaşi masă, $m_0 - m$, de exploziv ar „arunca" racheta, durata de consumare a explozivului fiind presupusă neglijabilă.

Dacă la explozie, gazele obţinute din masa $m_0 - m$ de exploziv sînt ejectate cu viteza u, iar racheta de masă finală m capătă viteza finală v, legea conservării impulsului se scrie

$$mv = (m_0 - m)u$$

$$v = u \frac{m_0 - m}{m} = u \left(\frac{m_0}{m} - 1 \right) \qquad (5.14)$$

Viteza obţinută prin explozie este mai mare decît viteza obţinută prin ejectarea continuă a gazelor, dată de relaţia (5. 13). În figura 5.9 este reprezen-

tat raportul v/u, dintre viteza finală a rachetei și viteza de ejectare a gazelor în funcție de raportul m/m_0, dintre masa finală și masa inițială a rachetei pentru cele două cazuri studiate: ejectarea continuă a gazelor și ejectarea gazelor prin explozie. În practică raportul m/m_0 este mai important, deoarece soluția optimă pentru lansarea unei rachete este aceea caracterizată printr-un raport m/m_0 mai mare, adică la o masă inițială m_0 dată, masa finală m este mai mare; cu alte cuvinte, soluția optimă pentru lansare este caracterizată printr-o cantitate mai mică de propulsant.

Deși pare mai avantajoasă lansarea prin explozie, deoarece, cu o masă de propulsant mai redusă, se realizează aceeași viteză finală, totuși la această lansare se dezvoltă o accelerație foarte mare. În cazul rachetelor care au cabine cu echipaj trebuie evitată obținerea unei accelerații foarte mari la lansare, pentru că omul nu suportă asemenea accelerații. Prin ejectarea continuă a gazelor, accelerația rachetei rămîne la valori suportabile de om.

În deceniul trecut motoarele rachetelor s-au îmbunătățit prin mărirea vitezei de ejectare a gazelor de la 2 000 m/s la 2 400 m/s. Pentru realizarea evadării din cîmpul gravitațional pămîntesc este necesar $v = 11\,600$ m/s (v. § 8.6) și deci

$$\frac{v}{u} = \frac{11\,600}{2\,400} = 4{,}84$$

Din relația (5.13) rezultă raportul $m_0/m = 130$, pentru lansarea prin ejectarea continuă a gazelor. În scopul unei călătorii, dus și întors, la Lună, pentru o masă finală $m = 50$ tone ar fi necesar la lansare o masă inițială $m_0 = 6\,500$ tone, ceea ce constituie o masă foarte mare! O soluție mai bună este aceea a rachetelor în trepte, soluție care îmbunătățește acest raport și care va fi examinată în § 8.7. De exemplu, la racheta Saturn V, treapta întîi ajunge la viteza $v = 2\,600$ m/s cu o viteză de ejectare a gazelor, $u = 2\,400$ m/s, ceea ce înseamnă că raportul vitezelor v/u este numai 1,08. Acestui raport al vitezelor îi corespunde, din relația (5.13) sau din figura 5.9, curba a, un raport $m_0/m \cong 3$ sau $m/m_0 \cong 0{,}3$; într-adevăr masa treptei întîi a rachetei scade de la 3 000 tone la 1 000 tone.

În relația (5.13) nu apare timpul necesar accelerării rachetei la lansare, datorită faptului că s-a neglijat acțiunea gravitației. Dacă în calcule se consideră acțiunea gravitației și dacă se presupune că accelerația gravitațională g rămîne constantă în timpul accelerării rachetei, atunci viteza finală v a rachetei se scrie

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt \tag{5.15}$$

Această relație reprezintă o relație aproximativă, deoarece accelerația gravitațională g nu rămîne constantă în timpul accelerării rachetei, care este o deplasare pe verticală; accelerația gravitațională scade cu pătratul altitudinii. Pe lîngă acțiunea gravitației, există și aceea a frecării rachetei cu păturile atmosferice. Aceste forțe exterioare sistemului rachetă-gaze modifică relațiile scrise mai înainte pe baza neglijării forțelor exterioare. Ca urmare, în cîmpul gravitațional și în contact cu păturile atmosferice racheta înaintează mai încet decît ar face-o în spațiul vid.

Se poate calcula forţa care acţionează asupra rachetei şi care produce acceleraţia necesară lansării. Împărţind fiecare membru al relaţiei (5.12) prin timpul elementar dt în care este ejectată masa dm de gaze şi în care viteza rachetei creşte cu dv, se obţine

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

Întrucît $dv/dt = a$, este acceleraţia la lansare, se scrie în valoare absolută

$$ma = u\frac{dm}{dt}; \qquad F = u\frac{dm}{dt} \tag{5.16}$$

Forţa la lansare este dată de produsul între viteza de ejectare a gazelor şi debitul cu care este consumat combustibilul. Această relaţie arată că la forţe mari sînt necesare debite de combustibil mari.

Dar cu cît masa unei rachete este mai mare cu atît şi forţa la lansare trebuie să fie mai mare, căci forţa la lansare trebuie să depăşească greutatea iniţială m_0g a rachetei, pentru a o putea ridica de la sol. În timpul lansării, forţa F rămîne constantă pentru că valoarea sa este impusă de puterea motoarelor; acceleraţia rachetei creşte pe măsură ce masa sa scade datorită consumului de propulsant, pentru ca produsul $ma = F$ să rămînă constant.

5.6. Legile dinamicii în mişcarea circulară

Legile dinamicii stabilite mai înainte se pot aplica şi la mişcarea circulară a unui corp punctiform. Pentru corpul de masă m, a cărui viteză liniară pe traiectoria circulară este $\vec{V}$, se introduce prin definiţie momentul impulsului

$$\vec{J} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{V} \tag{5.17}$$

unde $\vec{r}$ este raza traiectoriei circulare; vectorul $\vec{r}$ are originea în centrul cercului. Momentul impulsului este deci un produs vectorial; în unele cărţi are denumirea de *moment cinetic*. În alte cărţi, spre a accentua mai mult deosebirea dintre mişcarea circulară şi mişcarea rectilinie, mărimea $\vec{p} = m\vec{V}$ este denumită *impuls liniar* spre a o diferenţia de $\vec{J}$ care ar fi *impulsul unghiular*.

Pentru mişcarea circulară, ca şi pentru mişcarea liniară, legile dinamicii se deduc din descrierea fenomenelor respective.

Legea conservării momentului impulsului. Fie două corpuri care sînt în mişcare circulară, avînd momentele impulsurilor $\vec{J}_1$ şi respectiv $\vec{J}_2$. În urma unei interacţiuni, de exemplu o ciocnire a lor, cele două corpuri îşi vor modifica momentele impulsurilor; fie $\vec{J}_1'$ şi $\vec{J}_2'$ momentele impulsurilor după ciocnire. Conform legii conservării momentului impulsului

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1' + \vec{J}_2' \tag{5.18}$$

Suma momentelor impulsurilor înainte de interacţiune este egală cu suma momentelor impulsurilor după interacţiune.

Legea inerției. În cazul unui corp aflat în mișcare circulară, în lipsa vreunei interacțiuni, momentul impulsului se conservă

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

La mișcarea circulară, raza este o constantă și ca urmare, faptul că momentul impulsului rămîne constant conduce la faptul că viteza liniară pe circumferință, V rămîne constantă,

$$|\vec{J}| = r \cdot mV$$

Legea inerției pentru mișcarea circulară se enunță astfel:

În mișcarea circulară, în lipsa vreunei interacțiuni, un corp își păstrează nedefinit viteza liniară constantă pe circumferință.

De exemplu, dacă un satelit se învîrte în jurul unei planete fără atmosferă și nu interacționează cu vreun alt corp, mișcarea sa circulară durează nedefinit cu o viteză liniară constantă pe traiectoria circulară. Dacă satelitul se găsește în jurul unei planete care are atmosferă, frecarea cu păturile atmosferice constituie o interacțiune și legea inerției nu se mai aplică în acest caz.

Dacă mișcarea circulară a corpului se face astfel încît raza traiectoriei circulare scade, atunci se modifică viteza pe circumferință astfel încît momentul impulsului să rămînă constant. De exemplu, dacă cu o piatră legată cu o sfoară se execută o mișcare circulară, scurtarea sforii, adică scăderea razei r a traiectoriei circulare, impune creșterea vitezei liniare V pe circumferință, deoarece momentul impulsului $r.m.V$ trebuie să rămînă constant.

Legea forței. În cazul unei interacțiuni, momentul impulsului unui corp în mișcare circulară se modifică în timp,

$$\frac{d\vec{J}}{dt} \neq 0$$

Modificarea momentului impulsului înseamnă schimbarea parametrilor mișcării circulare și anume fie variația vitezei liniare V pe traiectorie, fie trecerea din starea de repaus în starea de mișcare circulară sau invers, oprirea corpului care se găsea în mișcare circulară.

Cu alte cuvinte la interacțiune există o derivată în raport cu timpul a mărimii $\vec{J}$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{V} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

În această expresie s-a presupus masa m a corpului constantă și s-a introdus accelerația $\vec{a}$, $\vec{a} = d\vec{V}/dt$, a corpului pe traiectorie. Expresia din membrul al doilea reprezintă momentul unei forțe

$$\vec{\mathfrak{M}} \equiv \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Astfel legea forței pentru mișcarea circulară se scrie

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mathfrak{M}} \tag{5.19}$$

Un corp își modifică mișcarea circulară, sau trece din repaus în mișcare circulară, sau trece din mișcare circulară în repaus, atunci cînd momentul unei forțe față de centrul mișcării este diferit de zero. Dacă există o forță diferită de zero, dar al cărei moment este nul, atunci această forță nu poate modifica mișcarea circulară.

De exemplu, un satelit artificial al Pămîntului se învîrte în jurul planetei astfel încît momentul impulsului rămîne constant. Pentru modificarea mișcării satelitului, adică pentru accelerarea sau frînarea lui, satelitul dispune de o rachetă proprie. Forța imprimată prin ejectarea gazelor are un moment față de centrul mișcării și astfel se poate modifica viteza pe traiectorie. În lipsa unei forțe imprimate și dacă are loc frecarea cu păturile atmosferice, forța de frecare are un moment care produce micșorarea momentului impulsului și deci „căderea" satelitului pe o traiectorie cu altitudinea mai mică.

5.7. **Relativitatea masei**

În experimentele dinamice realizate în scopuri științifice sau tehnice, măsurarea masei este o problemă foarte importantă. Din fizica de liceu se știe că masa se măsoară cu *cîntarul* sau cu *dinamometrul*. Prin cîntărire masa de măsurat se compară cu o masă cunoscută (masă marcată), pe cînd dinamometrul măsoară masele după ce acesta a fost, în prealabil, etalonat; etalonarea dinamometrului s-a făcut de asemenea cu mase marcate. Ambele procedee de măsurare a masei folosesc cîmpul gravitațional al Pămîntului cu deosebirea că balanța împreună cu cutia de mase marcate poate fi folosită și în alt cîmp gravitațional, deci pe altă planetă; cîntărirea este deci independentă de valoarea cîmpului gravitațional. Dinamometrul fiind etalonat într-un anumit cîmp gravitațional, gradațiile sale sînt valabile numai în acel cîmp gravitațional.

Procedeele de măsurare a masei, menționate pînă acum, sînt *procedee statice*; prin ele un observator măsoară masa unui corp aflat în sistemul său de referință. Cu terminologia folosită în capitolele anterioare, observatorul care este în repaus față de masa măsurată măsoară *masa statică* a unui corp. Un observator care se află într-un sistem în mișcare față de acela în care se găsește corpul investigat măsoară *masa cinematică* a acelui corp.

Se poate măsura masa cinematică a unui corp? Se poate, dar nu cu balanța sau dinamometrul. Procedeul care permite măsurarea masei unui corp care se află în mișcare față de observator, este un *procedeu dinamic*, deoarece se bazează pe ciocnirea corpului de masă necunoscută cu un corp de masă cunoscută. Prin măsurarea vitezelor înainte și după ciocnire, cu ajutorul legii conservării impulsului [v. relația (5.2)] se poate determina masa necunoscută. Procedeul dinamic pentru măsurarea maselor se poate folosi și în absența cîmpului gravitațional, de aceea ar fi singurul procedeu utilizabil pentru măsurarea masei corpurilor pe o navă cosmică care se găsește în afara unui cîmp gravitațional. Acesta este un procedeu care se folosește curent în fizica particulelor elementare pentru măsurarea maselor particulelor din microcosm.

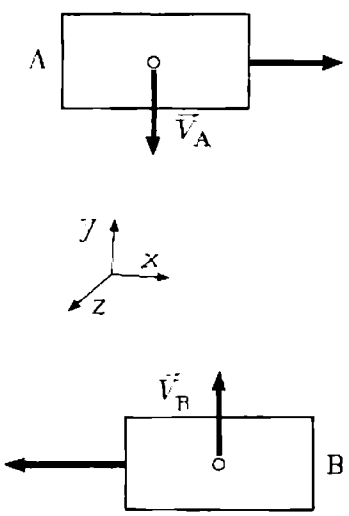


Fig. 5.10 Mişcarea sistemelor inerţiale A şi B, faţă de un sistem inerţial exterior celor doi observatori

Întrebarea care apare acum este: diferă masa cinematică de masa statică? Cu alte cuvinte: *masa este sau nu un invariant?* Răspunsul la această întrebare se obţine prin examinarea experimentului următor. Doi observatori A şi B se instalează pe două platforme, care constituie două sisteme inerţiale diferite; acestea se mişcă rectiliniu şi uniform pe două direcţii paralele, aşa cum este arătat în figura 5.10.

Fiecare observator dispune de cîte o bilă, care au fost astfel alese încît masele lor, măsurate de către un observator în repaus faţă de ele, sînt egale. Observatorii A şi B fiind fiecare în repaus faţă de platforma proprie, constată fiecare în parte aceeaşi masă statică pentru bila respectivă. La un timp dat, observatorul A aruncă bila sa (bila A) cu viteza V_A, măsurată faţă de sistemul ataşat platformei sale, iar observatorul B aruncă bila sa (bila B) cu viteza V_B, măsurată de asemenea faţă de sistemul ataşat platformei sale. Experimentul este aranjat astfel ca vitezele cu care sînt aruncate cele două bile să fie egale, $V_A = V_B$ şi ca bilele să se ciocnească centric şi să se întoarcă, după ciocnire, pe platformele respective.

În cele ce urmează se descrie experimentul aşa cum îl vede observatorul A, faţă de care platforma B se deplasează cu viteza de transport v (figura 5.11). Bila A se duce cu viteza $-V_A$ şi se întoarce, după ciocnire, pe platforma A cu aceeaşi viteză, dar de semn schimbat $+V_A$. Bila B se deplasează faţă de observatorul A cu o viteză care are componenta V_n, normală la direcţia de mişcare a platformei B; după ciocnire bila B se întoarce pe platforma B cu o viteză a cărei componentă normală pe direcţia de mişcare a platformei B este $-V_n$. Faţă de observatorul A ciocnirea bilei B este o ciocnire elastică oblică; în aplicaţia de la § 5.3 s-a arătat că la ciocnirea oblică, componenta normală îşi păstrează valoarea, dar îşi schimbă sensul, pe cînd componenta longitudinală rămîne nemodificată ca valoare şi sens.

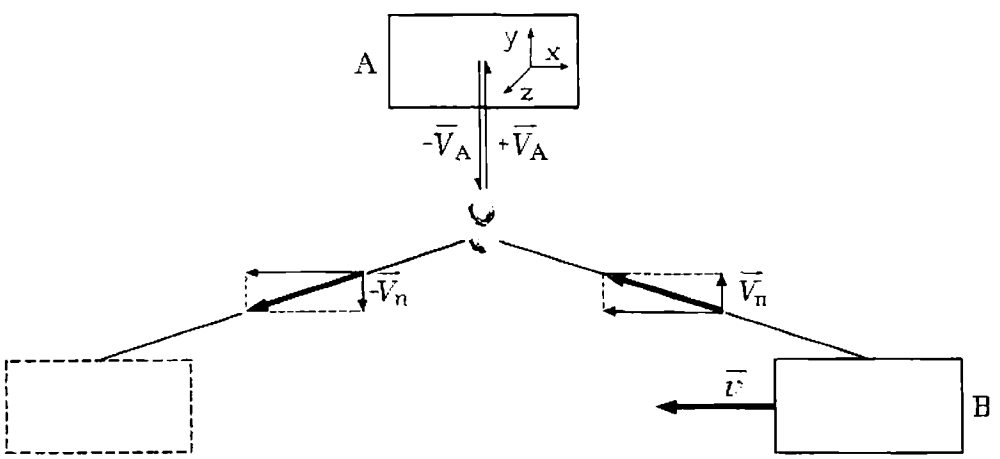


Fig. 5.11. Desfăşurarea experimentului de ciocnire a bilelor aşa cum este observat de A; $\vec{v}$ este viteza de transport a sistemului B faţă de A

Folosind valorile vitezelor bilelor faţă de sistemul său propriu, observatorul A poate scrie legea conservării impulsului în sistemul său inerţial pentru ciocnirea bilelor A şi B. În ceea ce priveşte masele bilelor, observatorul A

notează cu m' masa statică a bilei sale (bila A) și cu m'' masa cinematică a bilei B, aruncată de observatorul B, masă care nu se cunoaște și care trebuie determinată. Conform legii conservării impulsului, la ciocnirea bilelor, variația impulsului bilei A este egală cu variația, cu semn schimbat, a impulsului bilei B, față de sistemul inerțial al observatorului A

$$m'V_A - (-m'V_A) = -(-m''V_n - m''V_n)$$
$$2m'V_A = 2m''V_n$$

Cu ajutorul relației (4.13) se poate scrie componenta V_n a vitezei bilei B în funcție de viteza V_B a bilei față de sistemul platformei B

$$V_n = V_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

unde v este viteza de mișcare a platformei B, viteză egală cu viteza de transport a sistemului B față de sistemul A. Prin urmare

$$m'V_A = m''V_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Deoarece $V_A = V_B$ rezultă

$$m' = m'' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (5.20)$$

Dacă observatorul B ar fi descris experimentul, efectuat într-un mod asemănător, față de sistemul său inerțial ar fi ajuns la o expresie analogă pentru motivul că legea care descrie ciocnirea bilelor este adevărată pentru orice sistem inerțial. Relația (5.20) indică faptul că masa nu este un invariant.

Pentru a găsi relația între masa statică și masa cinematică a aceleiași bile, se reface experimentul de mai sus, aruncînd bilele cu viteze foarte mici, menținînd totuși egalitatea vitezelor V_A și V_B. La limită, cînd aceste viteze tind către zero, pentru observatorul A masa statică m' este chiar masa de repaus m_0

$$m' = m_0$$

iar masa cinematică m'' este masa de mișcare m

$$m'' = m$$

Pentru înțelegerea diferențierii care s-a făcut între cele două mase trebuie făcută următoarea precizare. Deși cele două bile se mișcă foarte încet, cu viteza practic nulă, fiecare față de platforma proprie, pentru observatorul A, bila B se deplasează cu o viteză mare. Într-adevăr în mișcarea bilei B, față de sistemul observatorului A, predomină componenta longitudinală a vitezei care este egală cu viteza de transport v a platformei B așa cum se vede și în figura 5.11. Viteza de transport v a platformei B este mult mai mare decît viteza de aruncare a bilelor.

Cu aceste notații relația (5.20) devine

$$m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \qquad (5.21)$$

unde s-a notat $1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ cu γ, care este tocmai factorul lui Lorentz, intîlnit în § 4.3. Valorile factorului γ în funcție de viteza v au fost date în tabelul 4.1.

Concluzia care rezultă este că un corp are o masă de mișcare mai mare decît masa de repaus, iar relația între cele două mărimi ale masei corpului depinde de viteza v a sistemului în care se află corpul investigat, față de sistemul în care se află observatorul. În figura 5.12 este reprezentată dependența raportului m/m_0 de raportul v/c, unde c este constanta luminii ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

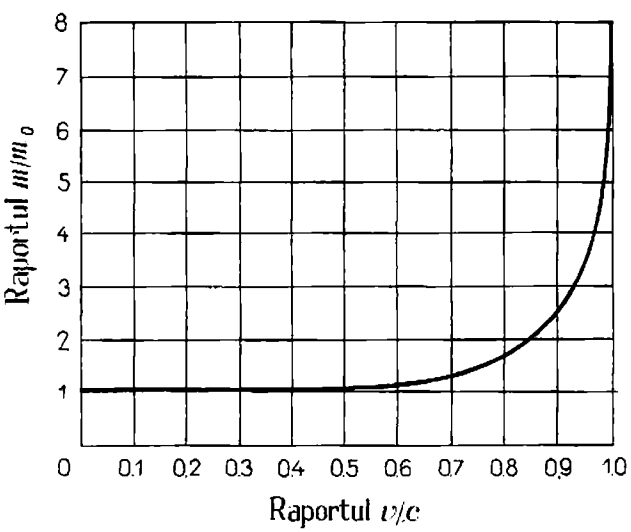


Fig. 5.12. Dependența raportului m/m_0 de raportul v/c unde v este viteza de transport a sistemului inerțial în care se găsește corpul cu masa de repaus m_0.

Această creștere relativistă a masei unui corp, exprimată prin relația (5.21), este reciprocă. Observatorul B, aplicînd procedeul dinamic de măsurare a masei, ar găsi că bila A are o masă mai mare decît aceea a bilei B, deși ambele bile sînt la fel de masive dacă sînt măsurate într-un sistem de referință față de care ele sînt în repaus.

În concluzie, *masa nu este un invariant:* un corp care are masa m_0 în repaus, prezintă diferite valori ale masei sale dacă măsurările se fac din sisteme inerțiale diferite. Aceste valori diferite ale masei sînt funcție de viteza de transport v a sistemului din care se face măsurarea, sau, ceea ce este același

lucru, de viteza de transport v a sistemului în care se găseşte corpul de măsurat faţă de sistemul în care se găseşte observatorul.

Relaţia (5.21) a fost verificată pentru electroni, care sînt particule uşor de accelerat, putîndu-se ajunge astfel la viteze foarte mari, apropiate de viteza limită c. Măsurarea faţă de sistemul laboratorului, a masei electronului, a arătat că masa m creşte funcţie de viteza v a electronului, măsurată faţă de sistemul laboratorului, întocmai cum redă expresia (5.21).

Se observă din relaţia (5.21) că la limită, cînd $v \to c$ se obţine

$$\lim_{v \to c} m = \infty$$

ceea ce constituie un alt argument că viteza c este o viteză limită în natură, care nu poate fi atinsă, deci nu poate fi depăşită. O masă infinit de mare nu poate exista deoarece

— ar necesita o forţă infinit de mare pentru a o accelera şi

— ar exercita o forţă gravitaţională infinit de mare asupra tuturor celorlalte corpuri din Univers.

În plus, un corp care s-ar deplasa cu viteza c ar avea lungimea în direcţia mişcării, contractată la valoarea zero (v. § 4.4), deci volumul său ar fi de asemenea zero, iar o masă infinit de mare într-un volum egal cu zero este imposibil de realizat.

Notă

Relaţia (5.21) permite exprimarea impulsului sub o formă mult folosită în fizica particulelor elementare. Scriind viteza de deplasare a sistemului inerţial sub forma $v = \beta c$ şi factorul lui Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ se obţine

$$\gamma \sqrt{1-\beta^2} = 1$$

$$\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$$

$$\beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

Impulsul mv al unui corp care se găseşte într-un sistem inerţial caracterizat prin viteza de transport v se scrie

$$p = mv$$

$$p^2 = m^2v^2$$

$$p^2 = m^2\beta^2c^2 = m^2c^2\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

$$p^2 = m^2c^2 - \frac{m^2c^2}{\gamma^2}$$

Deoarece $m = \gamma\, m_0$ rezultă

$$p^2 = m^2c^2 - m_0^2c^2 = (m^2 - m_0^2)c^2 \qquad (5.22)$$

Această expresie arată dependenţa pătratului impulsului unui corp de diferenţa pătratelor maselor corpului, de mişcare şi respectiv de repaus, c fiind o constantă universală.

Capitolul **6**

Forţele

6.1. Forţe fundamentale şi forţe de frecare

În capitolul precedent s-a definit forţa care acţionează asupra unui corp ca variaţia în timp a impulsului acelui corp, care are loc la interacţiunea corpului cu un altul; interacţiunea cu un cîmp este de fapt interacţiunea cu corpul care produce cîmpul. Datorită forţei F apare acceleraţia a, iar legea forţei se scrie

$$m \cdot a = F$$

Cu alte cuvinte, cunoscîndu-se forţa care acţionează asupra unui corp, cu ajutorul expresiei de mai sus, se poate deduce acceleraţia şi deci se poate stabili ecuaţia mişcării.

Forţele care produc mişcarea sau modificarea mişcării unui corp faţă de un sistem inerţial se numesc *forţe fundamentale.* Forţele fundamentale determină şi reacţiuni. Există mai multe tipuri de forţe fundamentale: forţe de cîmp, forţe imprimate etc. Forţele de cîmp cuprind forţele gravitaţionale, forţele electrice şi forţele nucleare. Forţele imprimate sînt acelea produse de motoare sau de explozii. Un tip de forţă fundamentală este şi forţa lui Arhimede, care apare în lichide sau în gaze; de exemplu un balon umplut cu heliu este pus în mişcare, de la suprafaţa Pămîntului pînă la altitudini mari, de către forţa lui Arhimede.

Experimental se constată că nu numai forţele fundamentale produc mişcare ci şi *reacţiunile* generate de aceste forţe. De exemplu o navă cu pînze este mişcată de reacţiunea produsă asupra pînzei datorată forţei care apare la ciocnirea moleculelor din aer cu pînza; această forţă a fost calculată în § 5.3. Reacţiunea vîntului asupra pînzei este numită de obicei *forţa vîntului.* La mişcarea unui autovehicul, se spune că forţa fundamentală este forţa imprimată autovehiculului de către motor. De fapt roata autovehiculului, acţionată de forţa imprimată, împinge într-un anumit sens terenul care suportă

vehiculul și acesta prin reacțiunea generată de forța imprimată împinge autovehiculul în celălalt sens. Intervenția în mișcarea unui corp a unei astfel de reacțiuni are loc ori de cîte ori un corp în mișcare are nevoie de mediul înconjurător (vaporul de apă, avionul de aer etc.). Numai mișcarea rachetei în spațiul liber (vid) se face fără „concursul" mediului înconjurător.

Un alt tip de forțe sînt *forțele de frecare.* Spre deosebire de forțele fundamentale, forțele de frecare nu pot pune un corp în mișcare, ci se opun totdeauna mișcării. Forța de frecare F_f avînd astfel sensul invers forței fundamentale F, legea forței în acest caz se scrie

$$ma = F - F_f \tag{6.1}$$

La mecanismele întîlnite în tehnică sau în cazul mișcării vehiculelor, frecarea nu poate fi înlăturată. Pentru mișcarea rectilinie și uniformă, în care accelerația $a = 0$, din relația (6.1) reiese că trebuie să existe o forță fundamentală care să compenseze forța de frecare F_f, adică $F = F_f$. Astfel la mișcarea rectilinie și uniformă a unui automobil, motorul furnizează o forță imprimată care are rolul să anuleze forța de frecare.

Din fizica de liceu se reamintește că forța de frecare la alunecare este proporțională cu *apăsarea normală* N pe suprafața de contact. În cazul în care suprafața de contact este un plan orizontal, apăsarea normală este chiar greutatea G a corpului și deci

$$F_f = \mu N = \mu G = \mu mg$$

μ fiind coeficientul de frecare la alunecare.

Datorită frecării cu aerul, în zborul lor, avioanele și planoarele întîmpină *rezistența la înaintare.* Rezistența la înaintare, ca orice forță de frecare se opune mișcării, este deci pe aceeași direcție dar de sens opus forței care produce mișcarea: tracțiunea motorului. Un exemplu va lămuri mai bine rolul rezistenței la înaintare. Care este condiția de zbor a avionului în aer? Pentru a răspunde la această întrebare trebuie să se țină seama de toate forțele care acționează asupra aripii avionului: tracțiunea T a motorului, rezistența la înaintare R, greutatea G și forța vîntului V, forță care este totdeauna perpendiculară pe suprafața aripii. În figura 6.1 s-au desenat aceste forțe pentru o aripă simplă, de formă plană. Dacă aripa ar avea o formă specială — aerodinamică — atunci forța vîntului ar fi înlocuită de *forța aerodinamică,* bine cunoscută din fizica de liceu. Pentru găsirea condiției de zbor a avionului se descompune forța vîntului după două direcții: componenta verticală V_1 și componenta orizontală V_2. Condiția de ascensiune este $V_1 > G$, iar condiția de înaintare este $T > R + V_2$. Mărind forța de tracțiune T, viteza avionului crește iar ca urmare a faptului că moleculele din aer lovesc aripa cu viteză mai mare, crește și forța vîntului V așa cum s-a arătat în § 5.3.

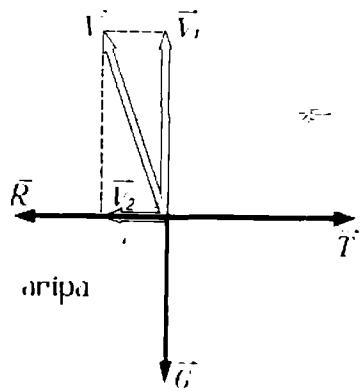


Fig. 6.1. Forțele fundamentale și de frecare care acționează asupra aripii avionului: $\vec{T}$ — tracțiunea motorului, $\vec{G}$ — greutatea avionului, $\vec{V}$ — forța vîntului, $\vec{R}$ — rezistența la înaintare

Forțele de frecare se explică prin existența *forțelor moleculare* care acționează atît în interiorul moleculei cît și între molecule. Forțele moleculare se datoresc interacțiunii tuturor particulelor componente ale moleculei: atomilor și componentelor atomilor, electronii și nucleele atomilor. Fizica clasică nu poate elucida proprietățile forțelor moleculare; proprietățile acestora sînt lămurite în mod satisfăcător numai de fizica cuantică.

6.2. Reacțiunile legăturilor

Dacă un corp este constrîns să se mişte numai pe o anumită suprafață sau pe o anumită curbă, se spune că mişcarea sa este supusă la legături. Astfel funicularul, monoraiul sau trenul se deplasează pe o traiectorie impusă de, respectiv, cablu, şină sau şine. Oricare ar fi direcția forței care se exercită asupra unui monorai, deplasarea acestuia se face numai de-a lungul şinei respective. De asemenea, o ambarcațiune plutește pe suprafața apei; ambarcațiunea este constrînsă să se mişte numai pe o suprafață.

Cablul pentru funicular sau şina pentru monorai constituie o „legătură"; această legătură impune din punct de vedere cinematic forma traiectoriei. De asemenea suprafața apei pentru ambarcațiune este o legătură. În tehnică se întîlnesc un număr mare de legături. Legăturile sînt foarte importante pentru funcționarea diferitelor mecanisme sau în tehnica transporturilor.

Legătura dă naştere unei *forțe de legătură* numită de obicei *reacțiunea legăturii*. În lipsa frecării, reacțiunea legăturii este perpendiculară pe curba sau pe suprafața pe care are loc mişcarea. Dacă există frecare, reacțiunea legăturii se descompune după două direcții: componenta normală şi componenta tangențială față de curba sau față de suprafața pe care corpul este constrîns să se mişte. Componenta tangențială reprezintă totdeauna forța de frecare şi ca urmare se opune deplasării corpului pe suprafața sau în lungul curbei. Spre exemplificare, se arată în figura 6.2 un corp constrîns să se mişte pe o şină cu o mişcare în care există frecare. Asupra corpului acționează o forță fundamentală F care se descompune în două componente: componenta F_1 în lungul direcției de mişcare şi componenta F_2 perpendiculară la această direcție. Reacțiunea legăturii R are două componente: componenta R_2 normală la direcția mişcării care anulează componenta F_2 ($R_2 = F_2$) şi componenta tangențială R_1 care este forța de frecare. Dacă m este masa corpului în mişcare legea forței se scrie

$$ma = F_1 - R_1$$

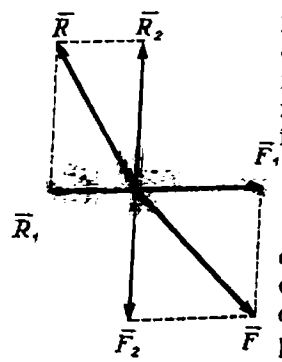


Fig. 6.2. Componentele longitudinale şi perpendiculare pe direcția impusă de legături a forței imprimate $\vec{F}$ şi a reacțiunii legăturii $\vec{R}$

Pentru un corp care se mişcă rectiliniu, în momentul efectuării unei curbe reacțiunea legăturii dă forța centripetă, datorită căreia mişcarea este curbilinie. La un automobil pe şosea legătura la curbă este impusă de forța de frecare dintre cauciucul anvelopei şi pavaj. Dacă această legătură ar dispare, de exemplu automobilul ar intra în curbă pe polei (frecarea nulă), forța centripetă ar fi nulă şi automobilul şi-ar continua mişcarea rectilinie după tangenta la curbă în punctul considerat.

Reacțiunile legăturilor au toate proprietățile forțelor în afară de aceea că nu pot pune în mişcare un corp aflat în repaus. Reacțiunea unei legături, la fel cu forța de frecare, se opune mişcării şi deci poate frîna mişcarea pînă la oprirea corpului. Prin urmare reacțiunea unei legături produce decelerație; cînd reacțiunea legăturii nu modifică modulul vectorului viteză, dar modifică direcția sa, se produce o acceleraţie normală — acceleraţia centripetă —.

Un caz interesant de mişcare supusă unei legături este mişcarea unei nave cu pînze. Dacă corpul navei nu ar avea forma care se dă de obicei unei ambarcațiuni, ci ar fi o semisferă plutitoare, adică fără o direcție privilegiată pentru navigație, forța vîntului asupra pînzei, ar împinge-o în direcția acestei forțe. Ceea ce este important de urmărit este faptul că o corabie cu pînze poate naviga şi în alte direcții decît în aceea a vîntului. Acest fapt se datorește

chilei, o placă rigidă fixată vertical în lungul corăbiei, la partea sa inferioară, sub apă. Datorită chilei, care determină o legătură, nava nu mai are aceeași ușurință de navigație în toate direcțiile și anume, nava „alunecă" pe apă mai ușor în lungul axei sale longitudinale, adică axa chilei, și foarte greu perpendicular pe axa sa. Datorită chilei, o ambarcațiune este constrînsă să se deplaseze pe o anumită traiectorie, care poate fi aleasă de navigator cu ajutorul orientării pînzelor și a cîrmei.

Forța vîntului V este totdeauna perpendiculară pe pînză și de aceea, în timpul navigației, pînza este manevrată astfel încît să se producă o componentă a forței vîntului pe direcția de mișcare dorită. Așa cum se arată și în figura 6.3, forța vîntului se descompune pe două direcții, direcția axei bărcii care este direcția de mișcare și o direcție perpendiculară la aceasta. Componenta V_l a forței vîntului în lungul axului bărcii este componenta datorită căreia nava se deplasează; componenta V_n, normală la chilă adică la axul bărcii este anulată de reacțiunea legăturii. Dacă α este unghiul dintre direcția vîntului și direcția de mișcare a navei, componenta V_l este cu atît mai mică față de forța vîntului V cu cît unghiul α este mai mare, așa cum se observă din figura 6.3.

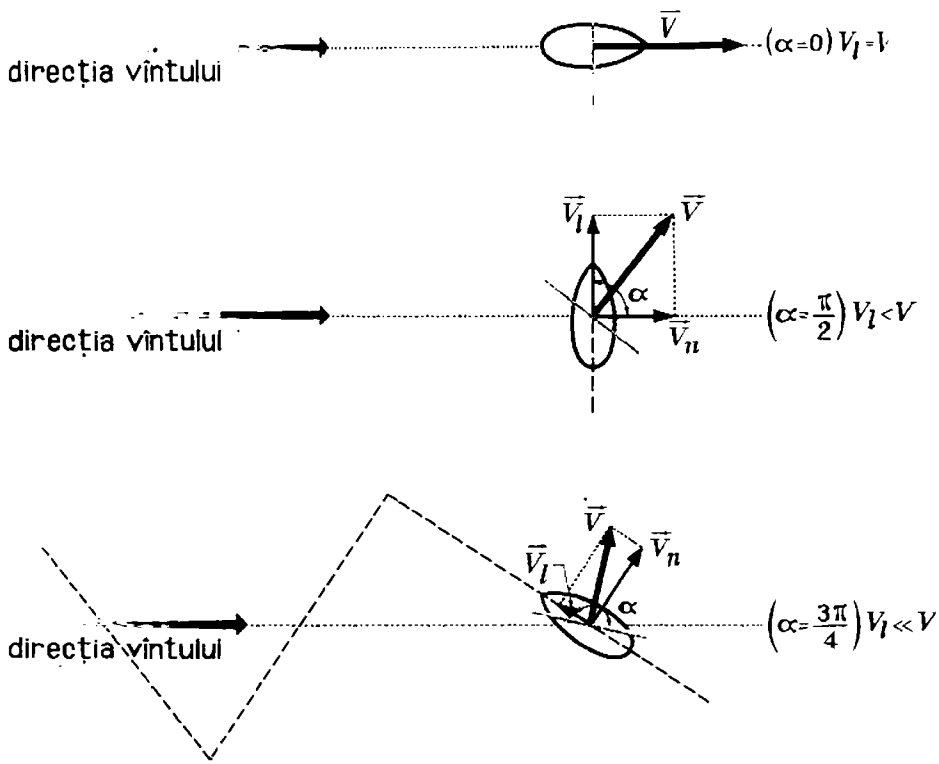


Fig. 6.3. Navigarea unei bărci cu pînze pe diferite direcții față de aceea a vîntului se datorește componentei $\vec{V}_l$ a forței vîntului $\vec{V}$ pe direcția chilei. Componenta $V_l = |\vec{V}_l|$ este cu atît mai mică față de forța $V = |\vec{V}|$ cu cît unghiul α dintre direcția vîntului și direcția de mișcare a bărcii este mai mare.

Se pot obține direcții de navigație caracterizate prin unghiuri α mari, chiar mai mari de $\pi/2$. Se poate realiza navigația „contra vîntului" și anume printr-o traiectorie în zigzag așa cum se vede în josul figurii 6.3. Desigur că nu se poate naviga chiar „contra vîntului" adică cu $\alpha = \pi$, deoarece în acest caz ar trebui ca pînza să fie în lungul axului corabiei și forța vîntului ar deveni nulă. Cu cît unghiul α este mai apropiat de π, cu atît componenta V_t este mai mică față de forța vîntului; marinarii spun în acest caz că nava „pierde mult din forța vîntului".

6.3. Precizări la legea forței

Dacă asupra unui corp sau sistem de corpuri acționează mai multe forțe fundamentale, se calculează *forța rezultantă* F, din compunerea forțelor, care trebuie luată în considerare la descrierea mișcării. Dacă corpul sau sistemul de corpuri, presupuse punctiforme, au o mișcare supusă la legături se calculează componenta forței rezultante pe direcția mișcării, numită *componenta liberă* F_L; direcția mișcării este direcția permisă de legăturile corpului sau ale sistemului de corpuri. Componenta perpendiculară pe direcția mișcării a forței rezultante este anulată de reacțiunea legăturii. Cu aceste considerații, legea forței în cazul unui corp sau sistem de corpuri punctiforme cu o mișcare supusă la legături se scrie

$$ma = F_L - F_f$$

unde F_f este forța de frecare, iar m este masa totală în cazul sistemului de corpuri.

Ca exemplu, în figura 6.4 se scrie legea forței pentru șase sisteme cu legături destul de simple, în care forța fundamentală poate fi o forță imprimată F_t, sau greutatea unuia din corpurile sistemului. În expresia forței de frecare intervine coeficientul de frecare μ și apăsarea normală la direcția de mișcare; *apăsarea normală* este mg, în cazul planului orizontal și mg cos α, în cazul planului înclinat. Pe planul înclinat, în componenta liberă (pe direcția mișcării) a forței rezultante apare componenta mg sin α a greutății corpului.

Un alt caz interesant, în care se folosește expresia legii forței dată mai sus, este acela al sistemelor de corpuri legate între ele prin bare sau cabluri; astfel de exemple sînt autocamionul cu remorci, trenul de vagoane, de șlepuri, de planoare etc. În barele sau cablurile de legătură între corpurile unui astfel de sistem apar forțe care se numesc *tensiuni* și care trebuie determinate. Pentru aplicarea legii forței la aceste cazuri se presupune că corpurile sistemului sînt punctiforme. Se presupune de asemenea că bara sau cablul de legătură este inextensibil. Datorită teoremei acțiunii și reacțiunii, în bara sau cablul de legătură apar două tensiuni, egale și de sens opus, care sînt notate cu T în figura 6.5.

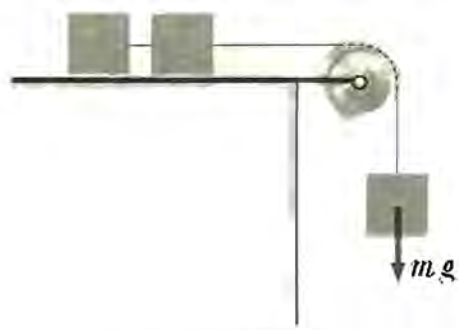
În cazul unui sistem de corpuri se scrie legea forței pentru fiecare corp în parte. Membrul al doilea al ecuației care exprimă legea forței va conține rezultanta forțelor fundamentale, forța de frecare și tensiunile; în mod convențional se admite că sensul pozitiv al acestor forțe este sensul mișcării. Se precizează faptul că accelerația a este aceeași pentru toate corpurile din sistem, în cazul în care ele sînt legate prin bare sau cabluri inextensibile. Pentru cele N corpuri ale sistemului de corpuri se obțin N ecuații care permit determinarea accelerației a și a celor $N-1$ valori ale tensiunilor.

Fig. 6.4. Forma legii forței pentru șase sisteme de corpuri fiecare cu masa m. Alunecarea pe planul orizontal sau înclinat se face cu coeficientul de frecare μ. Masa scripetelui se consideră neglijabilă. Forțele fundamentale (greutatea și forța imprimată) intervin cu componenta pe direcția de mișcare impusă de legăturile sistemului. Forța de frecare se situează totdeauna pe direcția de mișcare și este proporțională cu apăsarea normală la planul orizontal sau la cel înclinat.

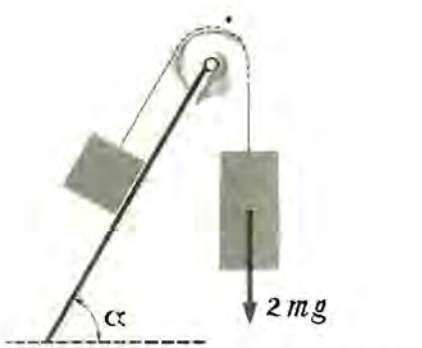
$3ma = F_i - 3\mu mg$

$3ma = F_i \cos\alpha - 3\mu mg$

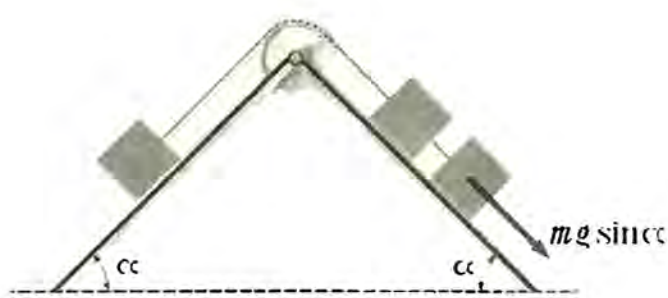
$3ma = mg$



$3ma = mg - 2\mu mg$



$3ma = 2mg - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$



$3ma = mg\sin\alpha - 3\mu mg\cos\alpha$

Fig. 6.5. Tensiunile $\vec{T}$ în bara sau cablul de legătură între două corpuri într-un sistem de corpuri legate

Aplicație

Fie un tren format dintr-o locomotivă de masă M și N vagoane fiecare de masă m. Forța care produce mișcarea trenului este forța imprimată F_i și se datorește motorului cu aburi sau electric al locomotivei. În mișcare intervine și forța de frecare a vagoanelor și a locomotivei pe șină caracterizată prin coeficientul de frecare μ. Aceste forțe împreună cu tensiunile sînt arătate în figura 6.6. Legea forței pentru locomotivă se scrie

$$Ma = F_i - \mu Mg - T$$

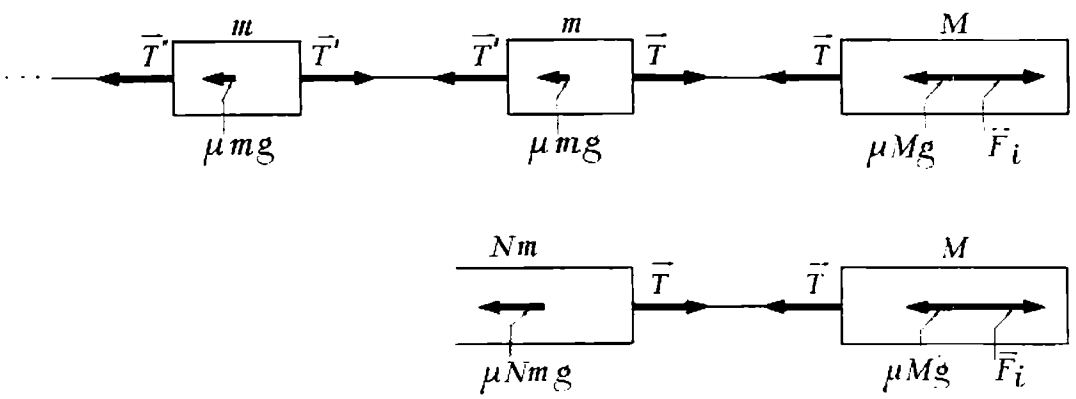


Fig. 6.6. Pentru determinarea tensiunii $\vec{T}$, cele N vagoane de masă m pot fi considerate ca un singur corp de masă Nm.

iar pentru cele N vagoane considerate ca un singur corp (fig. 6.6.) are forma

$$Nma = T - \mu Nmg$$

Prin rezolvarea acestor ecuații se obține accelerația a și tensiunea T

$$a(M + Nm) = F_i - \mu g(M + Nm)$$

$$a = \frac{F_i}{M + Nm} - \mu g$$

$$T = \frac{Nm}{M + Nm} F_i$$

Deoarece numitorul este mai mare decît numărătorul, raportul $Nm/(M + Nm) < 1$ și deci $T < F_i$; tensiunea T se apropie cu atît mai mult de valoarea forței imprimate F_i cu cît numărul de vagoane este mai mare.

Condiția pentru plecarea trenului este $a > 0$. Pentru ca această condiție să fie îndeplinită este necesar ca

$$\frac{F_i}{M + Nm} > \mu g$$

Din această expresie se poate determina forța F_t minimă necesară pentru tracțiunea celor N vagoane la o frecare dată (μ dat) sau numărul maxim N de vagoane ce poate fi tractat de o locomotivă cînd se cunoaște forța F_t și coeficientul de frecare μ.

Pentru determinarea tensiunii T' se scrie legea forței pentru primul vagon și pentru cele N-1 vagoane considerate ca un singur corp, cum rezultă din figura 6.7.

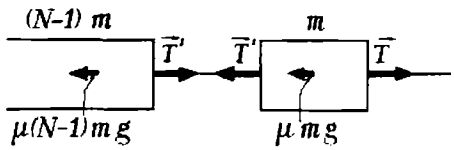


Fig. 6.7. Tensiunea $\vec{T}'$ poate fi determinată considerînd corpul de masă Nm format din două corpuri de mase $(N-1)\,m$ și respectiv m

Se obține

$$ma = T - \mu mg - T'$$

$$(N-1)\,ma = T' - \mu(N-1)\,mg$$

de unde rezultă tensiunea T'

$$T' = \frac{N-1}{N}\,\frac{Nm}{M+Nm}\,F_t = \frac{N-1}{N}\,T$$

Se observă că $T' < T$. Folosind același procedeu se poate determina T''; făcînd calculele se va obține $T'' < T'$. Prin urmare în sistemul de corpuri din figura 6.6, tensiunile între vagoane sînt din ce în ce mai mici, pe măsură ce vagonul este mai depărtat de locomotivă.

Observație

În cazul mișcării corpului supus la legături, direcția mișcării poate fi diferită de aceea a forței care produce mișcarea. Trebuie precizat că se mai întîlnesc și alte cazuri în care forța și mișcarea au direcții diferite:

a) Forța care acționează asupra unei sarcini electrice într-un cîmp magnetic este totdeauna perpendiculară pe viteză, deci are altă direcție decît aceea a mișcării.

b) Mișcarea unui corp care intră într-un cîmp de forțe avînd deja o viteză inițială se poate produce pe o altă direcție decît aceea pe care acționează forța. Ca exemplu, o sarcină electrică poate pătrunde într-un cîmp electric cu o viteză inițială perpendiculară pe liniile de cîmp. Forța electrică produce o mișcare perpendiculară pe mișcarea inițială datorită vitezei inițiale, iar mișcarea rezultantă se obține prin compunerea celor două mișcări. Alt exemplu este acela al aruncării unui corp în cîmpul gravitațional; aruncarea corpului se face cu viteză inițială și aceasta poate avea orice altă direcție diferită de aceea a cîmpului gravitațional. Ca urmare viteza rezultantă se obține din compunerea vitezei inițiale cu aceea care ar rezulta din mișcarea fără viteză inițială în cîmpul gravitațional.

6.4. Forțele de inerție în mișcarea rectilinie relativă

Legile dinamicii, prezentate în capitolul anterior, se refereau la un sistem inerțial. În foarte multe cazuri se întîlnesc *sisteme neinerțiale*, adică sisteme în mișcare accelerată, de exemplu un autovehicul cînd accelerează sau frînează, racheta în timpul lansării, sau un vehicul care, avînd o viteză constantă, efectuează o curbă. Care este legea forței într-un sistem neinerțial? Examinarea acestui caz va conduce la stabilirea *forțelor de inerție*.

Pentru cele ce urmează se va folosi sistemul de referință $Oxyz$ presupus fix și anume sistemul legat de suprafața Pămîntului și sistemul $O'x'y'z'$ în mișcare față de suprafața Pămîntului. Sistemul $O'x'y'z'$ este în mișcare accelerată astfel încît $\vec{a}_t$ este accelerația de transport a sistemului O' față de sistemul O. Dacă în sistemul O' se află un corp care se mișcă accelerat cu accelerația a' față de sistemul O', atunci accelerația $\vec{a}$ a corpului față de un observator din sistemul O va fi

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}' \tag{3.5}$$

așa cum s-a arătat în § 3.2 la studiul mișcării relative; v. relația (3.5).

Se presupune că sistemul mobil O' este de forma unei platforme de masă M căreia i se aplică forța $\vec{F}$, ce imprimă platformei o mișcare accelerată față de sistemul fix O cu accelerația $\vec{a}_t = \vec{F}/M$. Pe platformă se găsește o bilă cu care se vor face două experimente: în experimentul A bila nu este legată de platformă deci aderența este nulă, sau cu alte cuvinte, legătura este nulă, iar în experimentul B bila este legată de platformă prin intermediul unui resort (fig. 6.8).

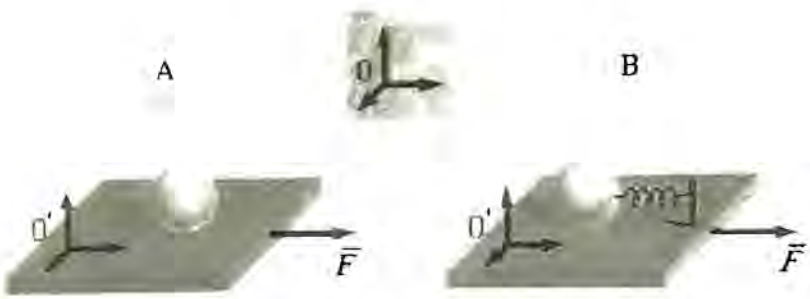


Fig. 6.8. Pe platforma accelerată cu forța $\vec{F}$ se găsește o bilă fără legătură (A) și cu legătură (B)

Un observator aflat în sistemul O, constată că la aplicarea forței $\vec{F}$, bila se comportă diferit în cele două experimente. În experimentul A, deși platforma pleacă din loc, bila rămîne în repaus față de sistemul fix ($\vec{a} = 0$), deoarece din cauza lipsei oricărei legături, forța $\vec{F}$ nu se transmite bilei, pe cînd în experimentul B bila nu rămîne în repaus față de sistemul fix ($\vec{a} \neq 0$), deoarece prin intermediul legăturii, forța $\vec{F}$ se transmite asupra bilei imprimîndu-i accelerația $\vec{a}$ față de sistemul O, astfel încît este satisfăcută relația

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{6.2}$$

unde m este masa bilei. Se remarcă faptul că $|\vec{a}| \neq |\vec{a}_t|$, deoarece cele două mase, m și M, sînt diferite; dacă $m < M$ rezultă $|\vec{a}| > |\vec{a}_t|$.

Un observator aflat în sistemul neinerțial O' constată că bila se mișcă atît în experimentul A cît și în experimentul B. Pentru a determina accele-

rația $\vec{a}'$ a bilei față de sistemul mobil O', el folosește expresia cinematică (3.5), din care deduce

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t$$

Pentru mărimea lui $\vec{a}$ el folosește constatările observatorului din sistemul O ale celor două experimente, care au fost arătate mai înainte, iar pentru accelerația $\vec{a}_t$, expresia calculată, $\vec{a}_t = \vec{F}/M$. În acest fel se pot scrie următoarele:

Experimentul A	**Experimentul B**
$(\vec{a} = 0)$	$(\vec{a} \neq 0)$
$\vec{a}' = -\vec{a}_t$	$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t$

Înmulțind cu m, se obține

$m\vec{a}' = -m\vec{a}_t$	$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_t$
	$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_t$

unde s-a introdus, în cele din urmă, prin expresia (6.2), forța $\vec{F}$ care poate fi o forță fundamentală (de cîmp sau imprimată).

În ecuația mișcării bilei pe platformă apare, în ambele experimente, produsul $m \cdot \vec{a}_t$ care este denumită *forța de inerție* $\vec{F}_{in}$

$$\vec{F}_{in} \equiv -m\vec{a}_t \tag{6.3}$$

Semnul minus care apare în relația (6.3) se interpretează prin faptul că forța de inerție se opune mișcării bilei în sistemul neinerțial al platformei. Forța de inerție nu este o forță fundamentală, deoarece nu produce mișcare față de un sistem inerțial; această forță produce numai mișcarea față de sistemul neinerțial O'. Forța de inerție nu se datorește interacțiunii cu vreun alt corp. Cu alte cuvinte, forța de inerție este reacțiunea unui corp față de sistemul în care este accelerat. Prin urmare, *forțele de inerție apar numai în sistemele neinerțiale.*

Un exemplu curent în care se observă apariția forței de inerție este mișcarea accelerată a tramvaiului, la pornirea sa. Călătorul nefixat de vagon, adică fără o „legătură" cu vagonul, este aruncat de către forța de inerție înapoi peste ceilalți călători. Pentru călătorul care se fixează de un sprijin, forța de inerție va fi anulată de reacțiunea legăturii din sprijin.

Exemplul dat ridică o nouă problemă, aceea a rolului „legăturii" în mișcarea relativă accelerată. Prin intermediul „legăturii", forța F se transmite asupra corpului din sistemul mobil O'. Dacă această legătură nu este suficient de rigidă, ea se poate rupe din cauza forței de inerție. Călătorul din tramvai nu se poate fixa cu o sfoară subțire, el trebuie să se asigure cu o legătură care să nu se rupă sub acțiunea forței $m\vec{a}_t$ unde m este masa călătorului, iar $\vec{a}_t$ este accelerația la pornirea tramvaiului. Prin urmare, în legătură (de exemplu resortul din fig. 6.8) apare o reacțiune a legăturii, care crește, într-un timp scurt, ajungînd la o valoare ce anulează forța de inerție. În acest caz $\vec{a}' = 0$, adică mișcarea corpului pe platformă dispare. Acest fapt se întîmplă și în cazul unei legături rigide: să ne închipuim în experimentul B

bila fixată rigid printr-un suport pe platformă. La aplicarea forței $\vec{F}$, bila rămîne în repaus față de platformă deoarece forța $\vec{F}$ se transmite prin suportul rigid. Se obține

$$\vec{a}' = 0 \qquad \vec{a} = \vec{a}_t$$

deoarece forța de inerție este anulată de reacțiunea legăturii.

Considerațiile făcute mai sus pentru accelerarea sistemului O' sînt adevărate și pentru decelerarea (frînarea) sistemului mobil.

6.5. Forțele de inerție în mișcarea circulară relativă

Un corp se poate deplasa într-un sistem de referință mobil O', care este în mișcare circulară. De exemplu, un sistem de referință în mișcare circulară este sistemul $O'x'y'z'$ legat solidar cu planeta noastră, avînd originea O' în centrul Pămîntului. Dacă un corp de masă m are o viteză relativă $\vec{w}$ față de sistemul mobil O', iar sistemul O' are, în punctul unde se află corpul, viteza de transport $\vec{v}_t$ față de sistemul O (fig. 6.9), atunci viteza $\vec{V}$ a corpului față de sistemul O va fi conform teoremei de compunere a vitezelor

$$\vec{V} = \vec{v}_t + \vec{w}$$

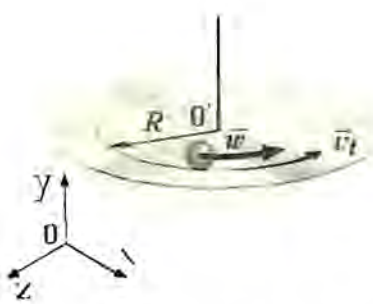


Fig. 6.9. Mișcarea relativă cu viteza $\vec{w}$, a unui corp punctiform într-un sistem în mișcare circulară cu viteza liniară de transport $\vec{v}_t$

Mișcarea corpului se poate datora unei forțe fundamentale, de cîmp sau imprimată, $\vec{F}$, astfel încît dacă $\vec{a}$ este accelerația față de sistemul O, legea forței în sistemul O are forma

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

O problemă interesantă o constituie deducerea expresiei legii forței față de sistemul O'. Pentru aceasta este necesară calcularea accelerației relative $\vec{a}_r$ a corpului față de sistemul O'. În acest scop se presupune că vitezele $\vec{v}_t$ și $\vec{w}$ sînt paralele, adică corpul se mișcă pe o traiectorie circulară de rază R (fig. 6.9) în sistemul O', un punct de pe acest cerc avînd viteza de transport $\vec{v}_t$ față de sistemul O. Presupunerea făcută, coliniaritatea celor două viteze, nu reduce cu nimic generalitatea concluziei la care se va ajunge. Coliniaritatea vectorilor viteză permite să se poată lucra cu mărimile scalare. Accelerația corpului față de sistemul O se va scrie (v. § 3.5)

$$a = \frac{V^2}{R} = \frac{(v_t + w)^2}{R} = \frac{v_t^2}{R} + \frac{w^2}{R} + \frac{2v_t \cdot w}{R} \tag{6.4}$$

Se observă că expresia accelerației conține trei termeni:

accelerația de transport $a_t = \frac{v_t^2}{R}$

accelerația relativă $a_r = \frac{w^2}{R}$

accelerația complementară $a_c = \frac{2v_t w}{R} = 2\omega w$

unde $\omega = v_t/R$ este viteza unghiulară a sistemului de referință O' în mișcarea sa circulară față de sistemul O. Cu ajutorul acestor accelerații ecuația de mișcare față de sistemul O se poate scrie

$$m(a_t + a_r + a_c) = F \tag{6.5}$$

din care se deduce ecuația de mișcare a corpului de masă m față de sistemul O'

$$ma_r = F - ma_t - ma_c \tag{6.6}$$

În membrul al doilea al relației (6.6) au apărut forțe care se opun mișcării. Această ecuație fiind exprimată pentru un sistem neinerțial, aceste forțe sînt interpretate ca forțe de inerție, cu precizarea că într-un sistem neinerțial în mișcare rectilinie apare o singură forță de inerție pe cînd într-un sistem neinerțial în mișcare circulară apar două forțe de inerție numite forța de inerție centrifugă F_{in} și forța de inerție Coriolis F_c

$$F_{in} = -ma_t \qquad F_c = -ma_c = -2m\omega w$$

Ca orice forțe de inerție, aceste forțe apar numai în mișcarea față de un sistem neinerțial; ele nu sînt forțe fundamentale deoarece nu pot pune un corp în mișcare, dar pot produce modificarea mișcării.

În § 3.5 s-a expus constatarea experimentală că accelerația de transport $\vec{a}_t$ și accelerația complementară $\vec{a}_c$ au același sens și anume către centrul mișcării circulare, în cazul $\vec{w} \parallel \vec{v}_t$. Ca urmare forțele de inerție $\vec{F}_{in}$ și $\vec{F}_c$ au direcțiile și sensurile impuse de relațiile vectoriale

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_t$$
$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{w} \tag{6.7}$$

Este de subliniat expresia forței Coriolis, care este dată de produsul vectorial între $\vec{\omega}$ și $\vec{w}$.

Se va exemplifica forma forței Coriolis pentru două moduri de mișcare a unui corp la suprafața Pămîntului. Primul mod de mișcare este acela în care vectorul viteză relativă $\vec{w}$ este paralel cu vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$. În acest caz forța Coriolis este egală cu zero. Acest mod de mișcare are loc la polii Pămîntului, cînd mișcarea se produce pe direcția verticală, sau la Ecuator cînd mișcarea se efectuează paralel cu suprafața Pămîntului și perpendiculară pe Ecuator. Al doilea mod de mișcare este acela în care vectorul viteză relativă $\vec{w}$ este perpendicular pe vectorul viteza unghiulară $\vec{\omega}$. În acest caz forța Coriolis are modulul

$$|\vec{F}_c| = 2m\omega w$$

O astfel de mișcare se întîlnește, de exemplu, la lansarea unei rachete la Ecuator cînd direcția de lansare este perpendiculară pe suprafața Pămîntului.

Efectul forței Coriolis este important în unele împrejurări, pe cînd în altele este neglijabil. Pentru a aprecia efectul forței Coriolis se calculează accelerația complementară, cu care această forță este proporțională și se compară cu accelerația gravitației g. Dacă accelerația complementară este apreciabilă față de accelerația gravitației înseamnă că la mișcarea în cîmpul gravitațional trebuie să se țină seama de modificarea traiectoriei datorată forței Coriolis. Exemplul care urmează va lămuri mai bine considerațiile făcute.

Exemplu.

Pentru calculul accelerației complementare este necesară mărimea vitezei unghiulare ω în cazul Pămîntului. Mișcarea de rotație a Pămîntului se face cu viteza unghiulară

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}3\ 10^{-5}\ \text{rad/s}$$

La lansarea unei rachete cu viteza relativă $w = 10^4$ m/s, accelerația complementară este

$$a_c = 2\omega w = 2 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

adică numai de 5 ori mai mică decît accelerația gravitației, ceea ce înseamnă o forță Coriolis apreciabilă care poate modifica mult traiectoria de lansare a rachetei.

La aruncarea unui proiectil cu $w = 2 \cdot 10^3$ m/s, accelerația complementară este

$$a_c = 2\omega w = 2 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^3 = 0{,}3\ \text{m/s}^2$$

adică o accelerație de 30 ori mai mică decît accelerația gravitației, ceea ce înseamnă o forță Coriolis care poate fi neglijată.

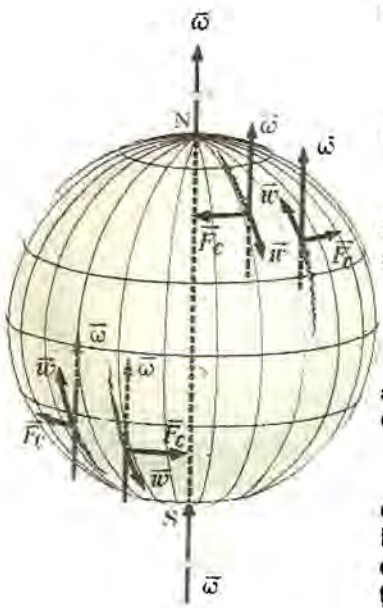


Fig. 6.10 Direcția și sensul forței Coriolis $\vec{F}_c$ pentru apele curgătoare cu viteza relativă $\vec{w}$. față de Pămînt, în cele două emisfere ale planetei. S-a indicat malul erodat în fiecare emisferă a Pămîntului: malul drept în emisfera nordică și malul sting în emisfera sudică

În considerațiile făcute, forța F care acționează rachetele sau proiectilele, conținută în relația (6.6), este o forță imprimată, dar există cazuri în care forța F este o forță de cîmp și anume, o forță gravitațională. Acesta este cazul mișcării unei ape curgătoare la suprafața Pămîntului sub acțiunea forței gravitaționale. Beer a observat că la apele curgătoare eroziunea malurilor ascultă de o anumită „lege" și anume, în emisfera nordică are loc eroziunea malului drept, pe cînd în emisfera sudică are loc eroziunea malului sting, indiferent de sensul de curgere al apei: de la Pol spre Ecuator sau de la Ecuator spre Pol, în fiecare emisferă.

„Legea" lui Beer enunțată astfel a căpătat o explicație abia după descoperirea forței de inerție Coriolis. Care-i cauza eroziunii? Datorită forței Coriolis apa este împinsă lateral asupra malului și produce astfel în timp eroziunea lui. Sensul acestei forțe explică de ce malul drept este erodat în emisfera nordică și malul sting în emisfera sudică, așa cum se arată în figura 6.10, indiferent de sensul de curgere al apei. Este evident că pentru apele curgătoare situate în regiunea Ecuatorului, forța Coriolis nu mai contează deoarece ea este fie nulă, pentru apele care curg perpendicular pe Ecuator ($\vec{w} \parallel \vec{\omega}$ și deci $\vec{\omega} \times \vec{w} = 0$), fie perpendiculară pe suprafața Pămîntului și deci a apei,

pentru apele care curg paralel cu Ecuatorul și în acest caz forța Coriolis nu exercită o acțiune asupra malului.

Chiar atunci cînd viteza relativă w a unei ape curgătoare este mică, și ca urmare forța Coriolis este redusă, datorită faptului că timpul de acțiune este extrem de lung, are loc o eroziune apreciabilă a malurilor.

6.6. Lucrul forței

Atunci cînd o forță produce deplasarea unui corp se vorbește despre „lucrul" acestei forțe. Cu acest sens fizic al lucrului forței, nu se execută un „lucru" de către un suport cînd el susține doar un corp, sau cînd un om ține în mînă un baros, cu toate că omul simte o oboseală a mușchilor în timp. Dacă însă omul ridică barosul, atunci el efectuează un lucru.

Cînd forța $\vec{F}$ acționînd asupra unui corp aflat inițial în repaus și nesupus la legături, produce o deplasare $\vec{s}$ a corpului în sensul forței lucrul L va fi

$$L \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s$$

Dacă corpul nu este inițial în repaus sau dacă există legături, atunci se poate întîmpla ca deplasarea $\vec{s}$ să facă unghiul α cu direcția forței și în acest caz lucrul forței are expresia

$$L \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha \tag{6.8}$$

Există cazuri în care forța este perpendiculară pe traiectorie; de exemplu, forța centripetă este perpendiculară pe traiectorie, forța lui Laplace care acționează în cîmpul magnetic asupra unui curent este totdeauna perpendiculară pe viteza de deplasare și, în fine, forța gravitațională care acționează asupra unui satelit ce se mișcă pe o orbită circulară este de asemenea perpendiculară pe traiectorie. În aceste cazuri unghiul α din relația (6.8) este egal cu $\pi/2$ și lucrul forței $\vec{F}$ este nul conform relației (6.8). În acest caz ($\alpha = \pi/2$) forța $\vec{F}$ nu are componentă pe traiectorie și deci accelerația liniară este nulă și ca atare viteza liniară este constantă.

Alte cazuri, mai interesante din punctul de vedere al lucrului forței sînt acelea în care asupra unui corp acționează mai multe forțe care pot fi fundamentale sau nefundamentale. Tipurile de mișcări reprezentative, întîlnite mai des sînt arătate în tabelul 6.1, unde s-a precizat pentru fiecare mișcare forța care produce mișcarea, numită *forța activă*, și forța rezultantă.

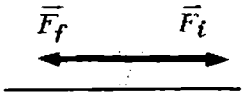
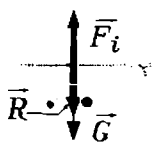
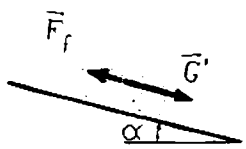
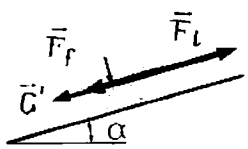
Pentru caracterizarea dinamică a mișcărilor în care intervin mai multe forțe este necesară introducerea unor noi mărimi: lucrul consumat și lucrul efectiv. *Lucrul consumat* se definește ca lucrul forței active $\vec{F}_A$

$$L_{cons} \equiv \vec{F}_A \cdot \vec{s} \tag{6.9}$$

Forța activă este totdeauna o forță fundamentală: forță imprimată, greutatea sau componenta greutății în direcția mișcării, așa cum reiese și din tabelul 6.1. În cazul particular al mișcării unui vehicul cu ajutorul unui motor, lucrul consumat reprezintă lucrul pe care un motor îl efectuează ca urmare a consu-

Tabelul 6.1

Tipuri de mișcări în care intervin mai multe forțe fundamentale și nefundamentale
Forțe fundamentale: F_t, G, G', G''
Forțe nefundamentale: F_f, R

Mișcarea	Forța activă	Forța rezultantă	Observații
Deplasarea orizontală 	Forța imprimată	$F_t - \mu G$	$F_f = \mu G$
Căderea liberă în atmosferă	Greutatea	$G - R$	R = rezistența aerului
Lansarea rachetei pe Lună	Forța imprimată	$F_t - G$	
Ridicarea verticală a elicopterului 	Forța imprimată	$F_t - G - R$	
Ridicarea submarinului în apă	Forța arhimedică	$F_A - G$	F = forța arhimedică
Căderea pe planul înclinat 	Componenta G' a greutății	$G' - \mu G''$	$G' = mg \sin \alpha$ $G'' = mg \cos \alpha$ $F_f = \mu G''$
Ridicarea pe planul înclinat 	Forța imprimată	$F_t - G' - \mu G''$	

mului de combustibil. Dacă motorul funcționează timpul t, atunci lucrul consumat satisface relația $L_{cons} = P \cdot t$, unde P este puterea motorului, o caracteristică foarte importantă a unui motor.

Așa cum s-a arătat în § 6.3, în cazul în care asupra unui corp acționează mai multe tipuri de forțe, legea forței se exprimă cu ajutorul forței rezultante și nu cu al forței active. Pentru acest motiv se definește *lucrul efectiv* ca lucrul forței rezultante $\vec{F}_{rez}$.

$$L_{ef} \equiv \vec{F}_{rez} \cdot \vec{s} \tag{6.10}$$

Referitor la cele două definiții ale lucrului se remarcă că lucrul consumat se calculează cu ajutorul componentei pe direcția mișcării a forței active $\vec{F}_A$, pe cînd lucrul efectiv se calculează cu ajutorul componentei pe direcția mișcării a forței rezultante $\vec{F}_{rez}$; componenta pe direcția mișcării a forței rezultante $\vec{F}_{rez}$ a fost numită în § 6.3, componenta liberă F_L.

În forța rezultantă intervine, așa cum se vede în tabelul 6.1, pe lîngă forța activă și alte forțe fundamentale care se opun mișcării (greutatea G, sau componentele sale G' și G'') precum și forțe nefundamentale (F_f, R). Forța rezultantă este forța care produce accelerarea corpului și deci forța care modifică viteza corpului.

În exemplele din tabelul 6.1 atît forța activă cît și forța rezultantă, calculată cum se arată acolo, sînt pe direcția mișcării. Din cauza forțelor care se opun mișcării, în toate cazurile este valabilă inegalitatea

$$F_{rez} < F_A$$

Această inegalitate se scrie între mărimi scalare. În cazul general în care forțele $\vec{F}_{rez}$ și $\vec{F}_A$ au direcții diferite, trebuie comparate componentele lor pe direcția mișcării. Inegalitatea de mai sus conduce la

$$L_{ef} < L_{cons}$$

În cazul în care forța rezultantă este nulă și lucrul efectiv este egal cu zero, deși lucrul consumat poate fi foarte mare. Acesta este cazul unei rachete sau al unui elicopter care stau în echilibru la o anumită altitudine; condiția de echilibru $\vec{F}_t = \vec{G}$ conduce la $\vec{F}_{rez} = 0$ și deci $L_{ef} = 0$ deși $L_{cons} \neq 0$. În acest caz particular, deoarece deplasarea este egală cu zero, lucrul consumat se calculează cu ajutorul puterii motorului. Alt caz interesant în care forța rezultantă este nulă este acela în care un vehicul, după ce a fost pus în mișcare, se deplasează cu viteză constantă. Deoarece accelerația este egală cu zero, înseamnă că $\vec{F}_{rez} = 0$ și deci $\vec{F}_t = \vec{F}_f$. Acest rezultat conduce la concluzia că $L_{ef} = 0$ deși $L_{cons} \neq 0$. La deplasarea cu viteză constantă, lucrul consumat este utilizat pentru învingerea forțelor care se opun mișcării: forța de frecare, rezistența aerului sau greutatea în cazul elicopterului sau a rachetei.

Urmează explicitarea lucrului efectiv în funcție de viteză, pentru a determina modul în care lucrul efectiv modifică mișcarea corpului. Dacă forța nu este constantă de-a lungul deplasării, se calculează lucrul elementar și apoi prin integrare lucrul total. Pentru o deplasare elementară $d\vec{s}$ a unui corp

de masă m, lucrul efectiv elementar va fi $dL_{ef} = \vec{F}_{rez}\ d\vec{s}$; lucrul efectiv total L_{ef} la o deplasare între două puncte, de la distanța s' pînă la distanța s'' este

$$L_{ef} = \int_{s'}^{s''} dL_{ef} = \int_{s'}^{s''} \vec{F}_{rez} \cdot d\vec{s} \tag{6.11}$$

Scriind forța rezultantă ca derivata impulsului $\vec{p}$ se obține

$$L_{ef} = \int_{s'}^{s''} \frac{d\vec{p}}{dt}\ d\vec{s} = \int_{p'}^{p''} d\vec{p} \cdot \vec{v}$$

Se schimbă limitele de integrare deoarece sub integrală apare o altă variabilă, impulsul. Sub acțiunea forței rezultante corpul își schimbă viteza și deci impulsul. Introducînd expresia impulsului $\vec{p} = m\vec{v}$, lucrul efectiv se scrie

$$L_{ef} = \int_{mv'}^{mv''} \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = m \int_{v'}^{v''} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \left| \frac{v^2}{2} \right|_{v'}^{v''}$$

deoarece variația impulsului de la p' la p'' este echivalentă cu variația vitezei de la v' la v'', v' fiind viteza inițială și v'' viteza finală a corpului. Prin urmare lucrul efectiv L_{ef} se va scrie

$$L_{ef} = \frac{mv''^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} \tag{6.12}$$

Mărimea $mv^2/2$ se numește *energie cinetică* și este o mărime care caracterizează starea de mișcare a corpului la un moment dat

$$E \equiv \frac{mv^2}{2} \tag{6.13}$$

Prin urmare consecința lucrului efectiv al unei forțe rezultante este creșterea energiei cinetice a corpului asupra căruia acționează forța rezultantă respectivă. Cu alte cuvinte energia cinetică a unui corp în mișcare se definește ca lucrul efectiv necesar pentru a aduce corpul din starea de repaus ($\vec{v} = 0$) în starea de mișcare caracterizată prin viteza $\vec{v}$.

În baza acestor considerații și cu conceptul de energie cinetică relația (6.11) se poate pune sub forma

$$E \equiv \int_{s=0}^{s} \vec{F}_{rez} \cdot d\vec{s} \tag{6.14}$$

originea spațiilor luîndu-se în punctul în care $\vec{v} = 0$ Relația (6.14) este foarte utilă pentru cele ce urmează.

6.7. Forțele conservative

Forțele conservative constituie o categorie de forțe denumite astfel datorită unei proprietăți a lucrului executat de ele. Pentru explicarea forțelor conservative se calculează lucrul efectuat la deplasarea unui corp pe un plan înclinat, pe distanța l, care reprezintă chiar lungimea planului înclinat. În lipsa frecării ($F_f = 0$), la căderea pe planul înclinat lucrul efectiv este egal cu lucrul consumat, deoarece asupra corpului acționează o singură forță fundamentală, forța activă fiind $G' = mg \sin \alpha$ și deci

$$L_{ef} = L_{cons} = G' \cdot l = mg\ l \sin \alpha = mgh$$

unde $h = l \sin\alpha$ este înălțimea planului înclinat (figura 6.11). La ridicarea corpului pe planul înclinat, pentru punerea în mișcare este necesar ca F_t să fie mai mare decît G'. După ce corpul a fost pus în mișcare este suficient ca F_t să fie egal cu G', pentru ca mișcarea corpului să continue și deci $F_t = G'$ sau $F_{rez} = 0$. În aceste condiții

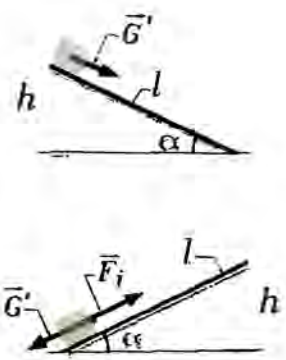


Fig. 6.11. Căderea și ridicarea pe planul înclinat de lungime l, în lipsa frecării

$$L_{ef} = 0$$

$$L_{cons} = F_i \cdot l = G' \cdot l = mg \sin \alpha \cdot l = mgh$$

Se observă că lucrul consumat la deplasarea pe planul înclinat, atît la cădere cît și la ridicare, în cazul în care frecarea este neglijabilă este independent de înclinarea α a planului. Cu alte cuvinte, lucrul consumat, adică lucrul forței active este independent de lungimea deplasării l — de drum — și depinde numai de înălțimea h, deci de diferența de altitudine dintre „starea" inițială și cea finală a corpului. În figura 6.12 celor trei deplasări pe cîte un plan înclinat de lungimi diferite le corespunde aceeași înălțime h

$$l_1 \sin \alpha_1 = l_2 \sin \alpha_2 = l_3 \sin \alpha_3 = h$$

În cele două cazuri de mișcare a corpului pe planul înclinat, căderea și ridicarea lui, forța activă este greutatea corpului, la cădere, și forța imprimată care învinge greutatea corpului, la ridicare. Deoarece greutatea este forța gravitațională, se conclude din cele de mai sus că lucrul forței gravitaționale, efectuat în sensul acestei forțe, la cădere, și în sensul opus forței, la ridicare, este independent de drumul parcurs între două puncte.

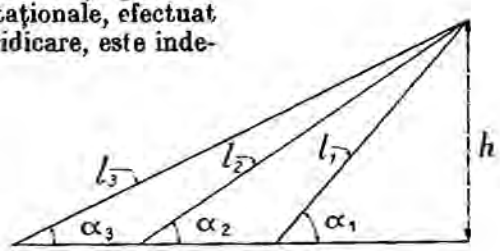
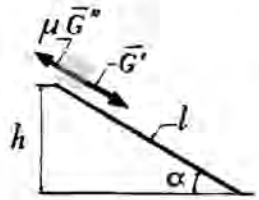


Fig. 6.12. Diferite planuri înclinate, de lungimi diferite, cărora le corespund aceeași înălțime h

Forțe *conservative* se numesc forțele al căror lucru nu depinde de drum. *Forța gravitațională este o forță conservativă.*

Cele două moduri de mișcare pe planul înclinat vor fi studiate acum în cazul în care se ia în considerare frecarea; aceste mișcări sînt arătate și în tabelul 6.1.



Lucrul efectiv la căderea pe planul înclinat de lungime l se calculează cu ajutorul forței rezultante (v. figura 6.13)

$$L_{ef} = F_{rez} \cdot l = (G' - \mu G'') \cdot l =$$
$$= mgl\ (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) =$$
$$= mgl \sin \alpha\ (1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) =$$
$$= mgh\ (1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha)$$

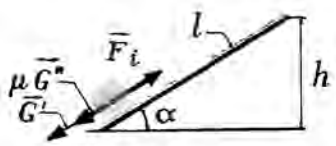


Fig. 6.13 Căderea și ridicarea pe planul înclinat de lungime l, în prezența frecării

Lucrul consumat la cădere se calculează cu ajutorul forței active, în acest caz G'

$$L_{cons} = G' \cdot l = mgl \sin \alpha = mgh$$

La ridicare, după ce corpul a fost scos din starea de repaus, mișcarea continuă cu viteză constantă, adică cu $F_{rez} = F_i - G' - \mu G'' = 0$, ceea ce înseamnă că expresiile celor două lucruri sînt

$$L_{ef} = F_{rez} \cdot l = 0$$
$$L_{cons} = F_i \cdot l = (G' + \mu G'') \cdot l =$$
$$= mgl\ (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) =$$
$$= mgl \sin \alpha\ (1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha) =$$
$$= mgh\ (1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha)$$

La ridicare, corpul ajunge sus „fără viteză" deoarece $L_{ef} = 0$, pe cînd la cădere corpul ajuns jos are o anumită viteză, deoarece $L_{ef} \neq 0$; acest rezultat este adevărat atît în prezența frecării cît și în absența frecării.

Se observă că la căderea unui corp pe planul înclinat, dacă se consideră frecarea, lucrul efectiv depinde de unghiul α; lucrul consumat depinde de unghiul α numai la ridicarea pe planul înclinat. Aceste calcule au fost făcute pentru examinarea caracterului conservativ al forțelor care intervin. Se poate calcula separat lucrul forței de frecare, care are, în ambele cazuri, expresia

$$L_{F_f} = F_f \cdot l = \mu mgl \cos \alpha$$

Deoarece în expresia lucrului acestei forțe intervine lungimea l a drumului, se conclude că lucrul forței de frecare depinde de drum și deci forța de frecare nu este o forță conservativă.

În lipsa frecării pentru un vehicul cu motor, lucrul forței imprimate F_i va fi

$$L_{ef} = L_{cons} = F_i \cdot l$$

deoarece $F_{rez} = F_A = F_i$. Se observă că lucrul forței F_i depinde de drumul parcurs de vehicul și prin urmare forța imprimată nu este o forță conservativă.

Din exemplele studiate în acest paragraf ar reieși că numai forța gravitațională este forță conservativă, dar se vor întîlni mai tîrziu și alte forțe conservative, de exemplu forța electrică coulombiană.

Capitolul **7**

Dinamica solidului

7.1. Generalităţi

În capitolele precedente au fost studiate legile dinamicii pentru mişcarea rectilinie şi mişcarea circulară a corpurilor punctiforme. În înţelesul propriu al cuvîntului, corpuri punctiforme nu există în natură, dar multe probleme de mecanică nu pot fi rezolvate decît considerînd corpurile ca fiind punctiforme. În multe cazuri, corpurile nu pot fi presupuse punctiforme. Un corp real, numit de obicei corp solid, este compus dintr-un număr mare de particule care, datorită unor *forţe interioare*, sînt menţinute unele faţă de altele în anumite poziţii; forţele interioare se comportă conform teoremei acţiunii şi reacţiunii (§ 5.4). Astfel între două particule, i şi respectiv j, forţa $\vec{F}_{ij}$ cu care particula i acţionează asupra particulei j este egală şi de semn contrar cu forţa $\vec{F}_{ji}$ cu care particula j acţionează asupra particulei i

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Pentru a descrie mişcarea corpului solid este necesară noţiunea de *grad de libertate*. Gradele de libertate sînt datele necesare pentru determinarea completă a poziţiei unui corp; aceste date sînt independente între ele. Numărul gradelor de libertate este egal cu numărul coordonatelor independente care caracterizează poziţia corpului.

În cazul unui punct, poziţia sa este complet determinată fie de vectorul de poziţie, fie de cele trei mărimi scalare, componentele vectorului; aceasta înseamnă că punctul are trei grade de libertate. Pentru determinarea completă a poziţiei punctului la un timp t oarecare este necesară cunoaşterea a trei funcţii independente între ele şi anume

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

În capitolele anterioare s-au întîlnit situaţii în care mişcarea punctului era limitată de legături. De exemplu, oricare punct P al unei uşi care se roteşte în jurul axei balamalelor, nu poate să se mişte decît pe o circumferinţă de rază R, al cărei centru este situat chiar pe axa balamalelor (fig. 7.1).

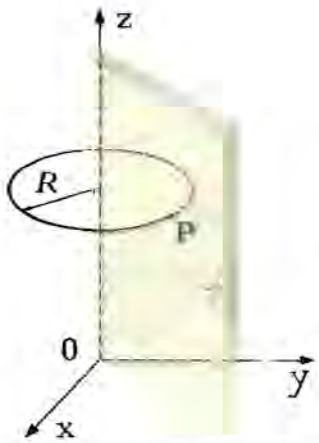


Fig. 7.1 Mişcarea punctului P legat de uşă este limitată datorită legăturilor la o circumferinţă într-un plan perpendicular pe axa Oz

În acest caz poziţia punctului P considerat poate fi determinată numai printr-o singură funcţie de timp şi anume de arcul de cerc măsurat de la un anumit punct pe circumferinţă, considerat origine (poziţia punctului cînd uşa este închisă), şi pînă la poziţia punctului la timpul t; ca urmare, punctul considerat are un singur grad de libertate.

Deci, legăturile limitează mişcarea punctului şi au ca efect micşorarea numărului funcţiilor independente necesare pentru determinarea poziţiei punctului. Un anumit corp punctiform constrîns să lunece pe o suprafaţă, de exemplu un obiect uşor pe suprafaţa apei, are două grade de libertate.

Din cele arătate mai sus se observă că un punct poate avea fie trei, fie două, fie un singur grad de libertate; în cazul în care punctul este solidar legat de un anume sistem de referinţă atunci acel punct nu are nici un grad de libertate.

Numărul gradelor de libertate ale unui punct se află *considerînd* rînd pe rînd cîte o coordonată a punctului, ca fiind constantă. Trebuie precizat că numărul gradelor de libertate este independent de alegerea sistemului de coordonate. Astfel, în exemplul precedent, se presupune de la început că în mişcarea pe care punctul P va fi constrîns să o facă, distanţa de la punct şi pînă la podea — coordonata z — rămîne neschimbată. Ca urmare numărul valorilor necesare pentru determinarea poziţiei punctului s-a redus cu încă o unitate. Considerînd apoi punctul P în mişcare pe o circumferinţă de rază R, se stabileşte prin aceasta încă o relaţie de dependenţă între coordonatele x şi y, în planul mişcării şi anume

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Astfel numărul gradelor de libertate s-a redus cu încă o unitate, căci în acest caz este suficient să se cunoască numai una din coordonatele x sau y, pentru a deduce pe cealaltă din ecuaţia de mai sus. În consecinţă punctul P al uşii are un singur grad de libertate.

Pentru determinarea numărului gradelor de libertate ale unui corp solid rigid, acesta poate fi considerat ca un sistem format din multe puncte legate între ele prin „bare" rigide, lipsite de masă. Dacă se cunosc poziţiile a trei puncte oarecare necoliniare, ale unui astfel de corp se cunoaşte poziţia tuturor celorlalte puncte ale corpului.

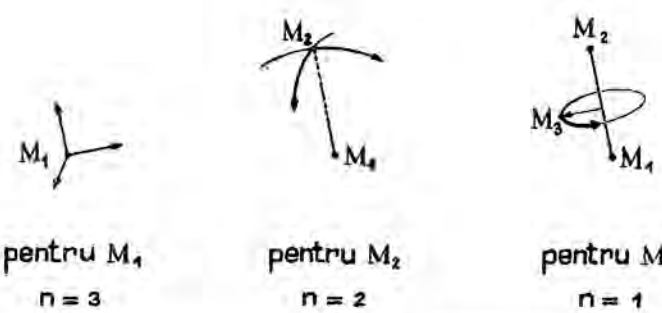


Fig. 7.2. Coordonatele necesare pentru determinarea poziţiei unui corp solid rigid în spaţiu; n este numărul coordonatelor pentru determinarea poziţiilor punctelor M_1, M_2, M_3

Se presupune punctul M_1 fixat în spaţiu, adică se impun pentru acest punct cele trei coordonate (v. fig. 7.2). În această situaţie punctul M_2 are

o libertate de mișcare restrînsă, fiind obligat a se mișca pe suprafața unei sfere de rază egală tocmai cu distanța M_1M_2. Dacă și punctul M_2 devine fix în spațiu, prin impunerea a încă două coordonate și anume coordonatele

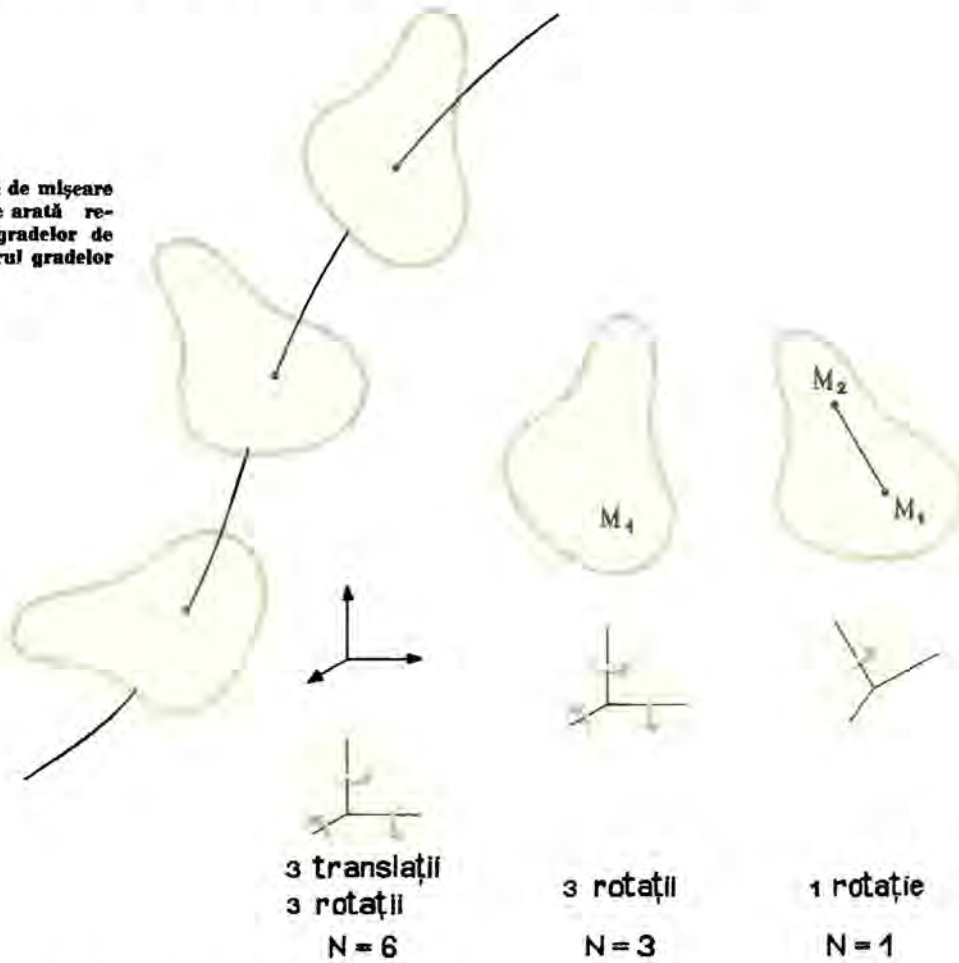


Fig. 7.3. Cîteva moduri de mișcare ale unui corp solid care arată restrîngerea numărului gradelor de libertate. N este numărul gradelor de libertate.

sferice pe sfera de rază M_1M_2, un al treilea punct M_3 se va putea mișca acum numai pe un cerc; în acest caz corpul solid are o axă fixă în spațiu, axa M_1M_2 și deci el se va roti în jurul acestei axe, cum se vede în figura 7.2. În fine, pentru fixarea punctului M_3 este suficientă cunoașterea unei singure coordonate și anume a arcului de cerc descris de punct. Fixînd în spațiu cele trei puncte ale corpului solid rigid, toate celelalte puncte ale corpului devin imobile. Considerațiile făcute conduc la concluzia că pentru fixarea solidului în spațiu sînt necesare

$$3 + 2 + 1 = 6 \text{ coordonate}$$

Problema numărului gradelor de libertate pentru corpul solid poate fi privită și altfel. Analizînd diferitele moduri de mișcare, în funcție de numărul

punctelor fixate în spațiu, se socotesc cîte translații sau cîte rotații poate efectua corpul solid. În figura 7.3 se arată trei moduri de mișcare ale corpului solid, și anume: mișcarea în care corpul solid nu are nici un punct fixat în spațiu, mișcarea în care corpul solid are punctul M_1 fixat în spațiu și mișcarea în care corpul solid are două puncte M_1 și M_2 fixate în spațiu. La prima mișcare sînt posibile trei translații și anume în lungul celor trei axe de coordonate și trei rotații, în jurul fiecăreia din cele trei axe de coordonate. La a doua mișcare, în care corpul solid are un punct fixat în spațiu dispare posibilitatea de efectuare a mișcărilor de translație în lungul celor trei axe. În această situație corpului solid îi rămîne doar posibilitatea de efectuare a rotațiilor în jurul celor trei axe de coordonate. În fine la a treia mișcare, avînd două puncte fixate în spațiu, corpul solid efectuează o rotație în jurul axei M_1M_2, cum s-a arătat mai înainte. Numărul mișcărilor de translație și de rotație posibile pentru corpul solid este egal cu numărul gradelor de libertate; aceste mișcări și aceste numere sînt indicate în figura 7.3.

Pentru un sistem de N particule libere, nelegate între ele, numărul gradelor de libertate este $3N$, deoarece sînt necesare $3N$ coordonate independente pentru a caracteriza pozițiile tuturor celor N puncte. De exemplu molecula biatomică reprezintă un sistem de două particule. Dacă particulele nu ar fi legate între ele sistemul ar avea nevoie de $3 \times 2 = 6$ coordonate, pentru determinarea poziției particulelor componente, dar atomii moleculei sînt legați prin forțe moleculare, astfel încît distanța dintre particulele componente ale sistemului este fixă. Ca urmare, din cele 6 date independente se scade una, corespunzătoare legăturii dintre cei doi atomi și deci molecula biatomică are 5 grade de libertate.

7.2. Centrul de masă

Pentru dinamica unui sistem de particule este necesar să se folosească noțiunea de centru de masă, în care este concentrată toată masa sistemului de particule și care, din punct de vedere dinamic, are aceeași comportare ca întreg sistemul de particule; în terminologia modernă centrul de masă se numește *centroid*.

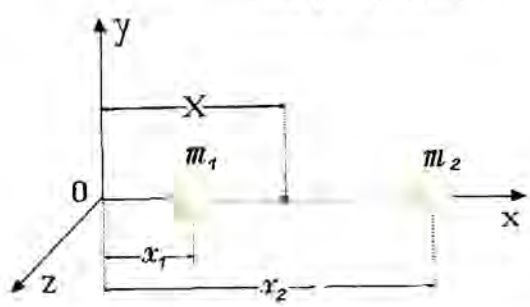


Fig. 7.4. Poziția centrului de masă pentru două corpuri de mase m_1 și m_2 situate pe axa OX

În cazul unui ansamblu de două particule care au masele m_1 și m_2 și coordonatele x_1 și x_2, pe axa Ox (fig. 7.4), centrul de masă al acestui ansamblu are abscisa X definită prin relația

$$X \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7.1}$$

Dacă poziţiile celor două mase sînt caracterizate prin vectorii de poziţie $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ (fig. 7.5) atunci prin definiţie vectorul de poziţie $\vec{R}$ al centrului de masă este

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{7.2}$$

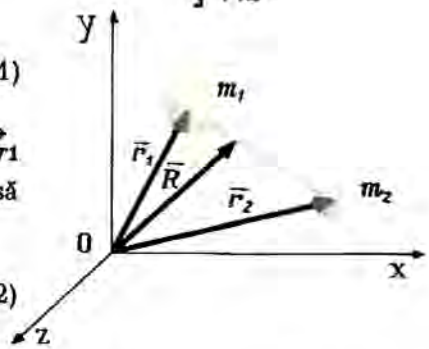


Fig. 7.5. Vectorii de poziţie pentru cele două corpuri de masă m_1 şi m_2 şi pentru centrul de masă

Studiul comportării dinamice a unui sistem de trei particule, facilitează înţelegerea noţiunii „centrul de masă" şi a proprietăţilor sale. În figura 7.6 sînt puse în evidenţă forţele exterioare $\vec{F}'_e$, $\vec{F}''_e$ şi $\vec{F}'''_e$, care acţionează asupra celor trei particule şi forţele interioare exercitate de particulele între ele, forţe care sînt, conform teoremei acţiunii şi reacţiunii, două cîte două egale şi de sens contrar. Pentru cele trei particule, avînd masele respectiv m_1, m_2 şi m_3, legea forţei se scrie

$$\vec{F}'_e + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}''_e + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{F}'''_e + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = m_3 \vec{a}_2$$

Prin adunarea celor trei ecuaţii se obţine

$$\vec{F}'_e + \vec{F}''_e + \vec{F}'''_e + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3$$

Conform teoremei acţiunii şi reacţiunii,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13} \quad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$$

Ţinînd seama de aceste egalităţi şi de faptul că suma forţelor exterioare individuale reprezintă forţa exterioară totală $\vec{F}_e$

$$\vec{F}_e \equiv \vec{F}'_e + \vec{F}''_e + \vec{F}'''_e$$

se obţine

$$\vec{F}_e = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 \tag{7.3}$$

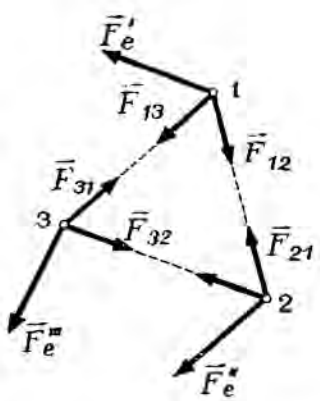


Fig. 7.6. Forţele exterioare şi forţele interioare care acţionează asupra unui sistem format din trei corpuri punctiforme

Ecuaţia (7.3) poate fi scrisă şi sub altă formă mai simplă. Membrul al doilea al ecuaţiei reprezintă de fapt expresia

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3)$$

unde $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ și $\vec{r}_3$ sînt vectorii de poziție ai celor trei particule. Introducînd vectorul de poziție $\vec{R}$ al centrului de masă definit prin relația

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M} \tag{7.4}$$

unde $M = m_1 + m_2 + m_3$ este masa totală a sistemului. Prin rearanjarea relației (7.4) și derivînd de două ori în raport cu timpul se obține

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3) =$$

$$= m_1\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} + m_3\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_3}{\mathrm{d}t^2} =$$

$$= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3$$

Deoarece membrul al doilea al acestei relații este identic cu membrul al doilea al relației (7.3), rezultă că această din urmă relație se mai poate scrie

$$\vec{F}_e = M\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}\ ; \quad \vec{F}_e = M\vec{A} \tag{7.5}$$

unde $\vec{A} = \mathrm{d}^2\vec{R}/\mathrm{d}t^2$ este accelerația centrului de masă. Relația (7.5) conduce la concluzia următoare: mișcarea sistemului de particule este identică cu mișcarea centrului de masă în care este concentrată toată masa sistemului de particule, iar forța care acționează asupra centrului de masă este forța exterioară totală.

În cazul unui corp solid, compus din N particule identice printr-un raționament analog se obține

$$\vec{F}_e = M\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = M\vec{A}$$

unde vectorii $\vec{F}_e$ și $\vec{R}$ precum și masa M sînt definiții prin expresiile (i numerotează particulele)

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ei}\ ; \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^{N}m_i\ ; \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i$$

Dacă se derivează vectorul de poziție $\vec{R}$ în raport cu timpul se obține o proprietate remarcabilă a centrului de masă

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum m\vec{v}_i \tag{7.6}$$

unde $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ este viteza particulei i. Întrucît $m_i\vec{v}_i$ este impulsul $\vec{p}_i$ al particulei i, iar $\Sigma \vec{p}_i$ este impulsul total $\vec{P}$ al sistemului de particule, relaţia (7.6) se poate scrie

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum \vec{p}_i = \frac{1}{M}\vec{P} \tag{7.7}$$

Derivata $d\vec{R}/dt$ reprezintă viteza centrului de masă, care se notează cu $\vec{V}$ şi expresia de mai sus devine

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

Analizînd parametrii dinamici ai centrului de masă, se poate obţine comportarea dinamică a sistemului de particule. Din acest fapt decurge o consecinţă foarte importantă: dacă un sistem are impulsul constant (legea inerţiei), *viteza centrului de masă rămîne constantă.* Dacă într-un asemenea sistem apare o modificare oarecare, de exemplu „scindarea" sistemului în mai multe părţi, părţile componente se mişcă fiecare astfel încît viteza centrului lor de masă rămîne constantă. Aşa se întîmplă în cazul unui nucleu radioactiv, care se deplasează cu viteza $\vec{V}$. Prin dezintegrarea nucleului apar două fragmente, nucleul rezultat şi radiaţia emisă; cele două fragmente se vor deplasa astfel încît centrul lor de masă (situat pe dreapta care le uneşte, mai aproape de fragmentul mai masiv) va avea viteza $\vec{V}$ a nucleului dinaintea dezintegrării (fig. 7.7). De asemenea în cazul catapultării unui pilot dintr-un avion, care

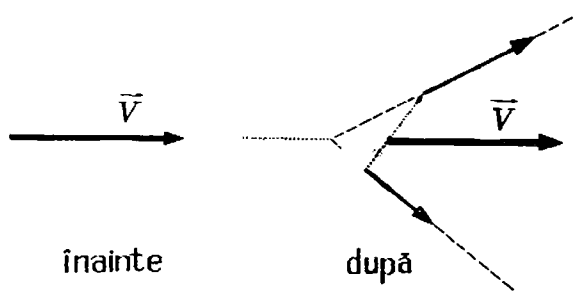


Fig. 7.7. Centrul de masă al unui sistem îşi păstrează impulsul constant în lipsa unor acţiuni exterioare: înainte = înainte de dezintegrare, după = după dezintegrare

se deplasează cu viteza constantă $\vec{V}$, după catapultare mişcarea avionului şi a pilotului cu scaunul său se face astfel încît centrul de masă al sistemului avion + pilot se deplasează cu aceeaşi viteză $\vec{V}$ ca şi înaintea catapultării.

7.3. Echilibrul corpului solid

Pentru un corp punctiform condiţia de echilibru mecanic, adică de a nu avea acceleraţie, este ca suma forţelor ce acţionează asupra lui să fie nulă. Dacă pentru un corp solid suma forţelor care acţionează asupra lui este zero, înseamnă că centrul de masă al acestuia nu este accelerat, cu toate că corpul

solid poate avea puncte care se mişcă în jurul centrului de masă cu o acceleraţie unghiulară, adică aceste puncte execută o mişcare de rotaţie accelerată. Acceleraţia unghiulară se datoreşte unui moment al forţei. Prin urmare, echilibrul unui corp solid se realizează numai dacă, atît suma forţelor ce acţionează asupra corpului cît şi momentul rezultant al forţelor exterioare sînt egale cu zero (i numerotează forţele)

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = 0 \tag{7.8}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = \Sigma \vec{\mathfrak{M}}_i = \Sigma (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \tag{7.9}$$

Un exemplu va lămuri mai bine aplicarea relaţiilor (7.8) şi (7.9). Fie un magnet care se găseşte într-un cîmp magnetic uniform. Asupra celor doi poli ai magnetului acţionează forţele $\vec{F}$ şi $\vec{F}'$, datorate cîmpului magnetic, care sînt paralele cu liniile de cîmp şi de sens opus. Oricum ar fi aşezat magnetul în cîmpul magnetic (fig. 7.8) suma celor două forţe $\vec{F}$ şi $\vec{F}'$ este totdeauna egală cu zero. Dar magnetul, situat în cîmpul magnetic, nu este în echilibru, decît într-o singură poziţie, aceea din figura 7.8, *b*. Pentru orice altă poziţie, de exemplu pentru aceea din figura 7.8, *a*, cele două forţe formează un cuplu, al cărui moment faţă de centrul O al magnetului este diferit de zero. Ca urmare magnetul se roteşte, pînă ce ajunge în poziţia de echilibru, în care momentul rezultant al forţelor $\vec{F}$ şi $\vec{F}'$ devine egal cu zero. În lipsa cîmpului magnetic, forţele $\vec{F}$ şi $\vec{F}'$ sînt nule şi deci momentele acestor forţe sînt nule; magnetul rămîne în echilibru în orice poziţie.

Fig. 7.8. Un magnet situat într-un cîmp magnetic se roteşte pînă ce momentul forţelor în cîmpul magnetic devine nul; în (a) $\vec{\mathfrak{M}} \neq 0$ pe cînd în (b) $\vec{\mathfrak{M}} = 0$

La folosirea ecuaţiei (7.9) se pune problema alegerii axei sau axelor faţă de care se calculează momentele forţelor. Se poate arăta că dacă corpul solid se află în echilibru faţă de o axă, el este în echilibru faţă de toate axele paralele cu prima. Pentru aceasta se presupun condiţiile (7.8) şi (7.9) îndeplinite faţă de o axă care trece prin punctul A (fig. 7.9). Fie, apoi, o a doua axă, paralelă cu prima, dar care trece prin punctul B, aflat la o distanţă h de punctul A. În exemplul din figura 7.9 s-au considerat doar trei forţe aplicate corpului solid. Momentele rezultante faţă de A şi B ale forţelor F_i (i numerotează forţele şi vectorii de poziţie respectivi)* se scriu

$$\vec{\mathfrak{M}}_A = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_B = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{3} [(\vec{r}_i + \vec{h}) \times \vec{F}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \vec{h} \times \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i =$$

$$= \vec{\mathfrak{M}}_A + \vec{h} \times \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \tag{7.10}$$

* Vectorul $\vec{h}$ folosit în continuare este orientat de la B la A, avînd relaţia $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{h}$.

Deoarece la echilibru $\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = 0$, din relația (7.10) se obține $\vec{\mathfrak{M}}_B = \vec{\mathfrak{M}}_A$. Cu alte cuvinte, la echilibru, momentul rezultant al forțelor calculat față de o axă rămîne nul față de oricare altă axă paralelă cu prima.

Relația (7.10) redă o teoremă deseori necesară și anume: momentul forțelor față de o axă B este egal cu suma între momentul forțelor față de o axă A paralelă cu axa B și momentul forțelor presupuse aplicate pe un suport paralel ce trece prin A, față de axa B, reprezentat prin termenul $\vec{h} \times \Sigma \vec{F}_i$.

De fapt ecuațiile vectoriale (7.8) și (7.9) conțin șase ecuații scalare și deci reprezintă șase condiții care trebuie satisfăcute de corpul solid pentru a fi în echilibru. Cele șase condiții corespund celor șase grade de libertate ale corpului solid, trei pentru mișcarea de translație și trei pentru cea de rotație. Un corp solid supus unor legături are un număr mai mic de grade de libertate și ca urmare și numărul condițiilor de echilibru este redus. De exemplu, un corp solid care se poate mișca doar pe o suprafață plană (o ambarcațiune pe un lac liniștit), are numai trei grade de libertate, două pentru translație, corespunzătoare celor două direcții perpendiculare între ele ale suprafeței plane și unul pentru rotație și anume rotația în jurul axului perpendicular pe suprafața plană. Ca urmare, condițiile de echilibru vor consta în anularea a două componente ale forței rezultante și în anularea unei singure componente a momentului față de axul perpendicular pe suprafața plană. În acest exemplu s-a precizat „ambarcațiune pe un lac liniștit" deoarece în prezența valurilor apar încă două grade de libertate, datorită cărora are loc tangajul și ruliul.

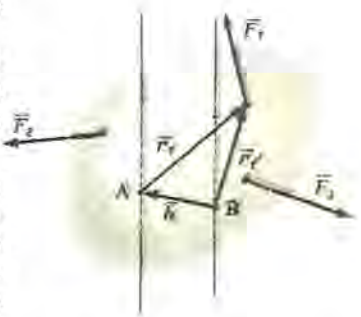


Fig. 7.9. Pentru calculul momentului forțelor față de o axă ce trece prin B distanțată cu distanța $h = |\vec{h}|$ de punctul A

7.4. Calculul momentului de inerție

În § 2.3 s-a arătat că pentru corpuri extinse, avînd o formă oarecare, calculul momentului de inerție trebuie să se facă împărțind corpul într-un număr infinit de mare de părți componente. Astfel suma din relația (2.10), stabilită în fizica de liceu, se înlocuiește cu integrala

$$I = \int r^2 \cdot \mathrm{d}m \tag{7.11}$$

unde $\mathrm{d}m$ este masa elementului de volum situat la distanța r de axa față de care se calculează momentul de inerție. Integrala se extinde asupra întregului volum al corpului și rezolvarea matematică este relativ simplă pentru corpuri omogene și de formă regulată, dacă se alege convenabil elementul de volum.

O exemplificare a unui asemenea calcul este dată de cazul unei bare cu secțiunea transversală constantă, pe toată lungimea barei, de lungime L și masă M, care se rotește în jurul unei axe ce trece prin centrul barei (fig. 7.10). Se împarte bara în segmente de lungime $\mathrm{d}x$, care se găsesc la distanța x variabilă, de axa barei. Dacă A este aria secțiunii transversale a barei, iar ρ este densitatea barei, atunci fiecare segment elementar are volumul $A \cdot \mathrm{d}x$ și masa

$$\mathrm{d}m = \rho A \, \mathrm{d}x$$

Momentul de inerție $\mathrm{d}I$ al unui segment al barei este

$$\mathrm{d}I = x^2 \cdot \mathrm{d}m = x^2 \cdot \rho \cdot A \, \mathrm{d}x$$

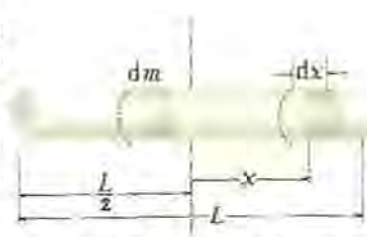


Fig. 7.10. Pentru calculul momentului de inerție al unei bare care se rotește în jurul unei axe ce trece prin centrul său

Considerînd pentru x originea ca fiind mijlocul barei, şi integrînd pentru x de la $-L/2$ la $L/2$ se obţine

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}I = \rho A \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \rho A \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \rho A \frac{L^3}{12}$$

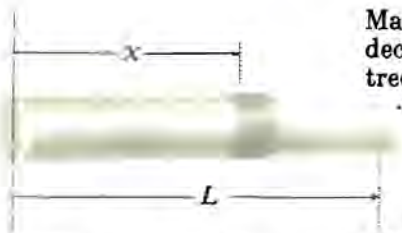


Fig. 7.11. Pentru calculul momentului de inerţie al unei bare care se roteşte în jurul unei axe ce trece prin capătul barei

Masa M a barei este dată de produsul între volumul AL şi densitatea ρ, şi deci momentul de inerţie al barei faţă de axa perpendiculară pe bară şi care trece prin centrul barei este

$$I = \frac{1}{12} ML^2 \tag{7.12}$$

Bara considerată s-ar putea roti în jurul unei axe care trece printr-unul din capetele sale, fiind perpendiculară pe bară (fig. 7.11), şi în acest caz este necesar să se calculeze momentul de inerţie faţă de această axă. Calculul se face folosind aceeaşi valoare a momentului de inerţie elementar, dar integrînd de la zero la L

$$I = \int_0^L \mathrm{d}I = \rho A \int_0^L x^2 \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \rho A \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

Prin urmare momentul de inerţie al barei de masă M şi lungime L faţă de o axă perpendiculară pe bară şi care trece printr-unul din capetele barei este $ML^2/3$ adică mai mare decît momentul de inerţie al aceleiaşi bare faţă de o axă ce trece prin centrul său.

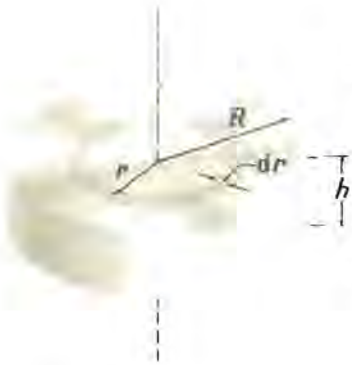


Fig. 7.12. Pentru calculul momentului de inerţie al unui cilindru plin care se roteşte în jurul axei sale

Alegerea elementului de volum prezintă o particularitate în calculul momentului de inerţie al cilindrului plin care se roteşte în jurul axei sale de simetrie; elementul de volum se alege sub forma unui strat inelar de grosime $\mathrm{d}r$ (fig. 7.12). Dacă cilindrul are înălţimea h şi densitatea ρ este uniformă, iar stratul inelar are raza r, volumul acestui strat va fi $(2\pi r \cdot \mathrm{d}r) \cdot h$, iar masa

$$\mathrm{d}m = 2\pi r h \rho \, \mathrm{d}r$$

Momentul de inerţie al stratului inelar este

$$\mathrm{d}I = r^2 \, \mathrm{d}m = 2\pi \rho h r^3 \, \mathrm{d}r$$

Integrînd relaţia de mai sus de la $r = 0$ pînă la $r = R$, care reprezintă tocmai raza cilindrului se obţine

$$I = \int_0^R \mathrm{d}I = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 \cdot \mathrm{d}r = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4}$$

Dar $\pi R^2 \rho h$ reprezintă masa M a cilindrului și deci momentul de inerție al unui cilindru plin față de axa sa de simetrie este

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \tag{7.13}$$

Dacă cilindrul care se rotește ar fi gol, adică toată masa M a sa ar fi situată într-o „folie" cilindrică de grosime mică față de raza R, atunci calculul momentului de inerție nu se mai face cu ajutorul integralei, ci are forma simplă MR^2, deoarece toată masa M a cilindrului gol se găsește la distanța R de axa de simetrie. Acest caz arată că momentul de inerție al cilindrului gol este mai mare decît al cilindrului plin, dacă masa M și raza R sînt aceleași pentru ambii cilindri. Este evident că realizarea unui cilindru plin și a unui cilindru gol de aceeași masă și cu aceeași rază se face cu materiale de densități diferite. Pentru ca un cilindru gol să aibă aceeași masă și aceeași rază cu acelea ale unui cilindru plin, cilindrul gol trebuie confecționat dintr-un material cu o densitate mult mai mare decît densitatea materialului din care este confecționat cilindrul plin.

Momentul de inerție al unei sfere în jurul unei axe se calculează alegînd axa de rotație Oz. În acest caz distanța unui punct la axa de rotație este $\sqrt{x^2 + y^2}$ și deci momentul de inerție al unei sfere omogene față de axa Oz este

$$I = \iiint (x^2 + y^2) \mathrm{d}m = \rho \iiint (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}V$$

Este necesar să se introducă și coordonata z pentru a ajunge la o formă integrabilă. Pentru pătura sferică, din motive de simetrie, se poate scrie

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Într-adevăr egalitatea se verifică scriind $x = y = z = R$. Dacă se introduce distanța r a unui punct de centrul sferei, adică de originea sistemului de coordonate $Oxyz$, rezultă

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

r fiind chiar raza unei pături sferice oarecare care variază de la O la R (R este raza sferei). Cu acestea, momentul de inerție al sferei se scrie

$$I = \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^2 \, \mathrm{d}V$$

Elementul de volum al unei pături sferice este $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r$ și deci

$$I = \frac{8\pi}{3} \rho \int_0^R r^4 \, \mathrm{d}r = \frac{8\pi}{3} \rho \left| \frac{r^5}{5} \right|_0^R = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$$

Introducînd masa sferei $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, momentul de inerție al unei sfere pline omogene față de o axă ce trece prin centrul său este

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \tag{7.14}$$

În concluzie prin calculele efectuate s-au stabilit următoarele valori ale momentelor de inerție.

Bară față de axa centrală $\frac{1}{12} ML^2$

Bară față de o axă marginală $\frac{1}{3} ML^2$

Cilindru plin față de axa centrală $\frac{1}{2} MR^2$

Cilindrul gol față de axa centrală MR^2

Sferă plină față de axa ei $\frac{2}{5} MR^2$

Din expresiile momentului de inerție se conclude că această mărime este proporțională cu masa corpului respectiv, fiind însă dependentă de distribuția acestei mase în spațiu, adică de forma geometrică. De exemplu, momentul de inerție este mai mare la bară față de o axă marginală decît la bară față de o axă centrală, deoarece în primul caz masa se găsește la distanță mai mare de axa de rotație decît în al doilea caz. De asemenea în cazul cilindrului, momentul de inerție este mai mare pentru cilindrul gol decît pentru cilindrul plin, deoarece la cilindrul gol toată masa este la distanța R pe cînd la cilindrul plin aceeași masă este distribuită de la distanța zero față de axă pînă la distanța R față de axă.

În cele ce urmează, se vor întîlni situații în care momentul de inerție al unui corp este variabil în timp. Variația momentului de inerție se datorește fie variației masei corpului respectiv, fie modificării distribuției spațiale a masei acelui corp. Întrucît aceste situații se întîlnesc în special în astrofizică, exemplele care urmează sînt luate din acest capitol al fizicii. O stea oarecare, ca și Soarele sistemului nostru planetar, prezintă o scădere a masei în timp așa cum se va arăta în § 9.4. Ca urmare momentul de inerție al unei stele, față de axa de simetrie scade în timp. O galaxie evoluează în timp de la o formă aproape sferică la o formă elipsoidală turtită, specifică unei galaxii cum s-a arătat în figura 1.1. În această ultimă formă substanța galaxiei se depărtează, în planul ecuatorial, de axa de simetrie, ceea ce are ca efect creșterea în timp a momentului de inerție al galaxiei față de axa de simetrie.

7.5. Dinamica rotației

Pentru studiul dinamicii rotației corpului solid se aplică legile dinamicii prezentate în capitolul 5. În acel capitol legile dinamicii au fost extinse de la mișcarea rectilinie a unui corp punctiform la mișcarea circulară a unui corp punctiform și anume, descrierea mișcării rectilinii s-a făcut cu ajutorul im-

pulsului iar descrierea mișcării circulare cu ajutorul momentului impulsului. Pentru corpul solid mărimea caracteristică la descrierea mișcării de rotație este de asemenea momentul impulsului $\vec{J}$, scris cu ajutorul momentului de inerție I, așa cum s-a arătat în § 2.3

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

$\vec{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară.

Legea conservării momentului impulsului afirmă că *suma momentelor impulsurilor a două corpuri solide înainte de interacțiune este egală cu suma momentelor impulsurilor după interacțiune*

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1' + \vec{J}_2' \tag{7.15}$$

Dacă două corpuri cu momentele de inerție I_1 și I_2, aflate în mișcare de rotație cu vitezele unghiulare $\vec{\omega}_1$ și $\vec{\omega}_2$ interacționează unul cu altul, după interacțiune vitezele unghiulare sînt $\vec{\omega}_1'$ și $\vec{\omega}_2'$, încît legea (7.15) se scrie sub forma

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = I_1\vec{\omega}_1' + I_2\vec{\omega}_2'$$

Dacă prin interacțiune cele două corpuri rămîn „asamblate" formînd un singur corp cu momentul de inerție I, viteza unghiulară finală $\vec{\omega}$ satisface relația

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = I\vec{\omega}$$

Aceste două cazuri pot fi exemplificate cu ajutorul a două roți dințate care se rotesc într-un mecanism oarecare. Dacă roțile sînt angrenate pentru o durată redusă și apoi se separă, interacțiunea care a avut loc modifică momentele impulsurilor, iar vitezele lor unghiulare finale satisfac relația scrisă mai sus. Dacă roțile dințate rămîn angrenate, atunci se formează un singur corp, caracterizat printr-un anumit moment de inerție și care se rotește cu o viteză unghiulară ω, care satisface ultima din relațiile scrise mai sus.

Legea inerției afirmă că *în lipsa vreunei interacțiuni un corp solid își păstrează momentul impulsului*

$$\vec{J} = \text{const.} \tag{7.16}$$

Pentru un corp care își păstrează mărimea $\vec{J}$ constantă, înseamnă că produsul $I \cdot \omega$ rămîne constant. Dacă momentul de inerție nu se modifică, rezultă că mișcarea de rotație se efectuează cu viteză unghiulară constantă, ca să fie satisfăcută expresia $\vec{J} = \text{const.}$, în cazul în care un corp nu interacționează cu alte corpuri.

Dacă un corp are momentul de inerție variabil, așa cum s-a arătat în § 7.4, legea inerției cere ca în lipsa unei interacțiuni, viteza unghiulară a rotației unui astfel de corp să se modifice astfel încît momentul impulsului, adică produsul $I \cdot \omega$ să rămînă constant. De exemplu, o galaxie are un moment al impulsului, neexplicat încă din punctul de vedere al originii sale. Deoarece

forma galaxiei se modifică în timp şi anume momentul său de inerţie creşte, cum s-a arătat în § 7.4, rezultă că viteza unghiulară a rotaţiei unei galaxii se micşorează, astfel încît momentul impulsului galaxiei să rămînă constant, în cazul în care galaxia nu suferă vreo interacţiune cu altă galaxie.

Frecarea este interacţiunea cea mai frecventă în natură. Datorită frecării un corp solid nu-şi poate păstra timp nedefinit momentul impulsului constant. Frecarea intervine de la cazurile cele mai simple pînă la cele mai complicate. De exemplu, un titirez pus în mişcare de rotaţie pe suprafaţa mesei, nu-şi poate menţine constant momentul impulsului şi ca urmare a frecării, mişcarea sa de rotaţie este frînată şi titirezul ajunge în stare de repaus. De asemenea frecarea intervine şi în cazul mişcării de rotaţie a planetelor care au atmosferă sau hidrosferă. Mişcarea păturilor de aer sau de apă, unele faţă de altele, provoacă, prin frecarea lor, modificarea momentului impulsului.

Legea forţei afirmă că *într-o interacţiune variaţia în timp a momentului impulsului este dată de momentul unei forţe*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathfrak{M}} \tag{7.17}$$

Vectorii $\vec{J}$ şi $\vec{\mathfrak{M}}$ sînt referiţi la o origine comună, care este de obicei, dar nu totdeauna, centrul de masă.

Întrucît $\vec{J} = I \cdot \vec{\omega}$ rezultă

$$\vec{\mathfrak{M}} = I\vec{\varepsilon} \tag{7.17'}$$

deoarece $\vec{\varepsilon} = \mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t$ este acceleraţia unghiulară. Din relaţia (7.17) rezultă că mişcarea de rotaţie a unui corp se poate modifica ($\varepsilon \neq 0$), accelera sau frîna, numai dacă momentul forţei faţă de axa de rotaţie este diferit de zero.

Tabelul 7.1

Legea dinamicii pentru corpul punctiform în mişcare rectilinie şi circulară şi pentru corpul solid în mişcare de rotaţie

Legea	Punctul		Solidul în mişcare de rotaţie
	în mişcare rectilinie ($\vec{p} = m\vec{v}$)	în mişcare circulară ($\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$)	($\vec{J} = I\vec{\omega}$)
Legea conservării impulsului (momentului impulsului)	$\Sigma\vec{p} = \text{const.}$	$\Sigma\vec{J} = \text{const.}$	$\Sigma\vec{J} = \text{const.}$
Legea inerţiei	$\vec{p} = \text{const.}$	$\vec{J} = \text{const.}$	$\vec{J} = \text{const.}$
Legea forţei (momentului forţei)	$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t}$
	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{r} \times m\vec{a}$	$\vec{\mathfrak{M}} = I\vec{\varepsilon}$

În tabelul 7.1 sînt sintetizate formele celor trei legi ale dinamicii pentru corpul punctiform și pentru corpul solid așa cum rezultă din §§ 5.2, 5.3, 5.6 și respectiv din acest paragraf.

Energia cinetică a corpului solid în mișcarea de rotație este dată de suma energiilor cinetice ale tuturor particulelor componente

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I$$

ω este viteza unghiulară a corpului solid iar I este momentul său de inerție.

7.6. Translația și rotația

În unele cazuri centrul de masă al corpului execută o mișcare de translație, în timp ce corpul se rotește în jurul centrului său de masă. De exemplu, se consideră un cilindru de masă m și rază R care se rostogolește pe un plan înclinat sub un unghi α (fig. 7.13). Corpul este presupus omogen încît centrul de masă coincide cu centrul geometric. De asemenea se face presupunerea că suprafața planului înclinat este suficient de aspră, astfel încît corpul să se rostogolească pe plan fără să alunece.

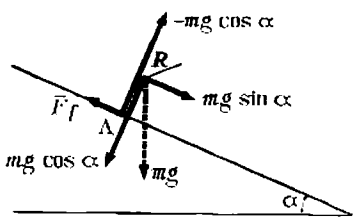


Fig. 7.13. Forțele care acționează asupra unui corp care se rostogolește fără alunecare pe un plan înclinat.

Asupra corpului acționează greutatea sa, care se descompune în două componente. Componenta greutății, $mg \cos \alpha$, perpendiculară pe plan este anulată de forța $-mg \cos \alpha$ exercitată de plan asupra corpului care se rostogolește (reacțiunea planului asupra corpului); datorită componentei $mg \sin \alpha$ se produce mișcarea de translație a centrului de masă al corpului. Nici una din aceste componente ale forței nu au moment față de centrul de masă al corpului; punctul de aplicație al acestor componente este tocmai centrul de masă. Datorită apăsării corpului pe plan, apare forța de frecare la rostogolire F_f care se opune mișcării și care produce un moment față de centrul de masă, deoarece este aplicată în punctul de contact al corpului cu planul.

Conform acestor considerații dinamice, se poate scrie ecuația mișcării de translație a centrului de masă față de planul înclinat

$$mg \sin \alpha - F_f = ma \tag{7.18}$$

Ecuația mișcării de rotație a corpului în jurul centrului de masă, conform relației (7.17') și a expresiei momentului $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$, este

$$F_f \cdot R = I \cdot \varepsilon \tag{7.19}$$

unde ε este accelerația unghiulară; forța F_f este singura forță care are moment față de centrul de masă și care produce mișcare de rotație.

Întrucît dinamica furnizează numai două ecuații (7.18) și (7.19), care conțin cele trei necunoscute, forța de frecare F_f, accelerația liniară a și accelerația unghiulară ε, pentru determinarea acestor mărimi mai trebuie găsită încă o ecuație. În cazul rostogolirii fără alunecare, un observator din sistemul centrului de masă * vede punctul de contact A accelerat tangențial cu

* Sistemul centrului de masă este sistemul de referință legat de centrul de masă al unui corp.

accelerația a; se poate scrie $a = R \cdot \varepsilon$ (v. § 2.2). Deoarece $\varepsilon = a/R$ relația (7.19) devine

$$F_f \cdot R = I \frac{a}{R}$$

iar relația (7.18) se va scrie

$$mg \sin \alpha - \frac{I}{R^2} a = ma$$

$$mg \sin \alpha = a\left(m + \frac{I}{R^2}\right)$$

Prin urmare, la rostogolirea fără alunecare accelerația și forța de frecare au expresiile

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + I/R^2} \tag{7.20}$$

$$F_f = \frac{I}{R^2} \frac{mg \sin \alpha}{m + I/R^2} \tag{7.21}$$

Se observă din relația (7.20) că cu cît momentul de inerție al unui corp este mai mare, accelerația lui la rostogolire este mai mică. Pentru a ilustra mai bine acest rezultat se consideră trei corpuri: un tor (cilindru gol de înălțime mică), un cilindru plin și o sferă plină, confecționate din materiale diferite astfel încît masa lor să fie aceeași și raza de asemenea aceeași. Momentul de inerție are valoarea cea mai mare în cazul torului, este mai mic la cilindru și are valoarea cea mai mică în cazul sferei. Notînd cu I_t momentul de inerție al torului, cu I_c momentul de inerție al cilindrului și cu I_s al sferei se poate scrie

$$I_t > I_c > I_s$$

Fig. 7.14. La rostogolirea fără alunecare pe un plan înclinat, accelerația este cu atît mai mare cu cît momentul de inerție este mai mic. Cele trei corpuri au masele și razele egale, fiind confecționate din materiale cu densități diferite

Lăsînd cele trei corpuri să se rostogolească pe planul înclinat, la timpul $t = 0$ toate trei fiind la partea de sus a planului înclinat, se observă că ele înaintează în mod diferit pe planul înclinat și anume așa cum se arată în figura 7.14. Cu cît momentul de inerție este mai mic, cu atît accelerația corpului la rostogolire este mai mare.

Două discuri de mase egale și raze egale sînt confecționate din aluminiu și plumb, unul încărcat cu plumb în centrul de masă, iar celălalt încărcat la periferie. Momentele de inerție sînt diferite și anume discul încărcat cu plumb la periferie are momentul de inerție mai mare decît acela al discului încărcat în centrul de masă. La rostogolirea pe planul înclinat, discul al cărui moment de inerție este mai mic va avea accelerația mai mare și va înainta mai repede (figura 7.15).

Care este viteza discului la baza planului înclinat? Energia cinetică a discului este dată de suma între energia cinetică de translație și energia cinetică de rotație,

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{7.22}$$

Cei doi termeni ai expresiei sînt independenți: primul termen exprimă energia cinetică datorată mișcării de translație a centrului de masă, iar al doilea, energia cinetică datorată rotației discului în jurul centrului de masă. Independența energiilor cinetice în expresia (7.22) se explică prin faptul că discul poate să alunece fără să se rotească sau se poate roti astfel încît centrul de masă să rămînă în aceeași poziție.

În cazul rostogolirii fără alunecare, punctul de contact al discului cu planul înclinat rămîne instantaneu în repaus față de planul înclinat. Ca urmare punctul de la periferia discului, în contact cu planul înclinat se mișcă față de centrul de masă al discului cu viteza cu care se mișcă centrul de masă față de planul înclinat (fig. 7.16). Dar viteza punctului periferic al discului față de disc este dată de produsul $R \cdot \omega$, unde R este raza discului și ω viteza unghiulară cu care se rotește discul. Dacă v este viteza de translație a centrului de masă se poate scrie

$$v = R \cdot \omega$$

Această relație leagă parametrul mișcării de translație (v) cu acela al mișcări de rotație (ω). Cu expresia lui ω din această relație, $\omega = v/R$, relația (7.22) devine

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{I}{R^2}\right)$$

Întrucît discul este un cilindru plat, momentul de inerție I are expresia $\frac{1}{2} mR^2$ și deci

$$E = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{1}{2} m\right) = \frac{3}{4} mv^2$$

Prin rostogolirea pe planul înclinat discul își transformă energia sa potențială în energie cinetică. La capătul de sus al planului înclinat discul are energia potențială mgh, unde h este înălțimea planului înclinat. La baza planului înclinat energia cinetică este egală cu energia potențială la înălțimea h, și deci

$$mgh = \frac{3}{4} mv^2$$

$$v^2 = \frac{4}{3} gh$$

Prin urmare prin rostogolirea fără alunecare, discul capătă o viteză $v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$, această viteză este mai mică decît viteza pe care ar fi avut-o corpul prin alunecare fără rotație pe planul înclinat, care este $v = \sqrt{2gh}$, așa cum se știe din fizica de liceu.

Fig. 7.15. Pentru două discuri cu masele și dimensiunile egale, care se rostogolesc fără alunecare și pe un plan înclinat, cel cu momentul de inerție mai mic înaintează mai repede. Modificarea momentului de inerție s-a obținut adăugînd plumb în centrul discului (moment de inerție mic) și aproape de periferia discului (moment de inerție mare)

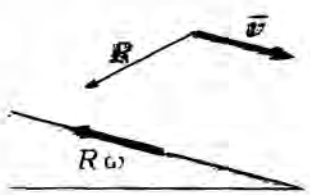


Fig. 7.16. La rostogolirea fără alunecare viteza unui punct la periferia discului, $R\omega$, este egală cu viteza $v = |\vec{v}|$ a centrului său de masă.

Capitolul **8**

Gravitaţia

8.1. Legea lui Newton

Gravitaţia este un fenomen fundamental din natură; legea gravitaţiei exprimă faptul că între toate corpurile din Univers există o interacţiune sub forma unei forţe de atracţie între ele. Caracterul universal al forţei gravitaţionale şi expresia sa cantitativă au fost stabilite de Isaac Newton. Legea lui Newton afirmă că două corpuri de mase m_1 şi m_2 situate la distanţa r se atrag cu forţa

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{8.1}$$

unde γ — constanta gravitaţională — este o mărime independentă de orice proprietate a celor două corpuri. Experimental, constanta γ se poate determina aşezînd două corpuri, fiecare cu masa de un kilogram la distanţa de un metru. Măsurîndu-se, printr-o metodă oarecare, forţa F care acţionează asupra celor două corpuri se găseşte valoarea $F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N; întrucît $m_1 = m_2 = 1$ kg şi $r = 1$ m, din relaţia (8.1) rezultă

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot m^2}{\text{kg}^2}$$

Forţa F dată de relaţia (8.1) acţionează atît asupra corpului de masă m_1 cît şi asupra celui de masă m_2 (fig. 8.1). Conform teoremei acţiunii şi reacţiunii cele două forţe care acţionează asupra celor două corpuri sînt egale şi de sens contrar.

Forţa gravitaţională este o forţă fundamentală şi deci poate produce mişcarea corpurilor asupra cărora acţionează. Corpurile din figura 8.1 avînd mase diferite vor căpăta şi acceleraţii diferite

$$a_1 = \frac{F}{m_1} \qquad a_2 = \frac{F}{m_2}$$

Plecînd cu aceste accelerații din starea de repaus, corpurile se deplasează pînă se ciocnesc. Deoarece în realitate corpurile nu sînt perfect elastice, după mai multe ciocniri cele două corpuri vor rămîne lipite. Ca urmare, ar însemna că efectul forțelor gravitaționale asupra corpurilor din Univers ar fi îngrămădirea lor într-un singur corp, ceea ce de fapt nu se constată; din contră, se constată că în Univers corpurile se află la anumite distanțe unele față de celelalte. Acest lucru se datorește faptului că corpurile se găsesc pe orbite gravitaționale; pentru un corp aflat pe orbita gravitațională forța centripetă, care este tocmai forța gravitațională, este egală cu forța de inerție centrifugă. Pentru ca asupra unui corp să se exercite o forță de inerție centrifugă, înseamnă că atunci cînd corpul a intrat în cîmpul gravitațional a trebuit să aibă o viteză inițială, deci să aibă deja o mișcare. Datorită acestei mișcări inițiale, corpurile s-au înscris pe orbite gravitaționale.

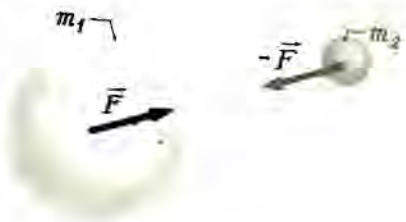


Fig. 8.1. Forțele gravitaționale care acționează asupra a două corpuri de mase diferite sînt egale și de sens contrar conform teoremei acțiunii și reacțiunii

Prin egalitatea celor două forțe se realizează *echilibrul dinamic* al corpului pe orbita gravitațională.

Aceste considerații conduc la concluzia că corpurile alcătuind lumea înconjurătoare în care acționează forța gravitațională nu pot fi în repaus. *Universul este constituit deci din corpuri în mișcare.* Cu alte cuvinte în Univers este imposibil un echilibru static stabil, adică cu toate corpurile în repaus.

Mișcarea ca condiție esențială a echilibrului dinamic, care s-a menționat mai sus, este întîlnită atît în microcosm cît și în macrocosm. În cazul mișcării electronilor în interiorul atomului, forța centripetă este o forță electrică, dar în echilibrul dinamic al atomilor în interiorul unei stele sau în acela al stelelor într-o galaxie forța centripetă este forța gravitațională.

Deși problema mișcării pe orbita gravitațională va fi studiată în § 8.5, totuși este necesar ca aici să se facă o completare. Această completare se va referi la mișcarea a doi aștri sub acțiunea forței gravitaționale. Studiul acestei mișcări este important în astrofizică deoarece permite descoperirea planetelor aparținînd altor sisteme solare și care datorită distanțelor foarte mari, nu pot fi observate direct.

Se presupune mișcarea pe o orbită circulară a unui astru A față de un astru B. Centrul de masă al sistemului format din cei doi aștri va fi pe dreapta care unește centrele lor și mai aproape de cel mai masiv. Se neglijează acțiunea altor aștri asupra aștrilor A și B. Dacă astrul B ar fi în repaus și se consideră două poziții succesive ale astrului A (fig. 8.2, *a*) se observă că centrul de masă C s-ar deplasa în jurul astrului B. Prin urmare presupunînd repausul unuia din cei doi aștri ar rezulta mișcarea centrului de masă al sistemului în jurul unuia din aștri. Acest lucru este imposibil, deoarece în lipsa unei interacțiuni, centrul de masă al unui sistem de corpuri, se mișcă *rectiliniu cu viteza constantă* sau este în repaus. Prin urmare presupunerea că unul din cei doi aștri rămîne în repaus nu poate fi adevărată. Cei doi aștri trebuie să se miște astfel încît centrul lor de masă să aibă o mișcare rectilinie și uniformă sau să rămînă în repaus. Se demonstrează în mecanica teoretică și se observă din figura 8.2, *b*, că mișcarea care satisface acestei condiții este aceea în care atît astrul A, cît și astrul B efectuează orbite gravitaționale circulare, în jurul centrului de masă.

Dacă masa astrului B este foarte mare în comparație cu aceea a astrului A, centrul de masă al sistemului este foarte aproape de centrul geometric al lui B și ca urmare traiectoria circulară a astrului B are o rază mai mică decît aceea a astrului A: cu alte cuvinte, mișcarea astrului B în jurul

centrului de masă este mai redusă decît mișcarea lui A în jurul centrului de masă. Pentru astrofizică, observarea mișcării unei stele în jurul centrului de masă al sistemului planetar al stelei oferă singurul mijloc prin care se pot descoperi eventualele planete — aștrii neluminoși — din afara sistemului nostru solar. Planetele din afara sistemului nostru solar nu pot fi văzute de pe

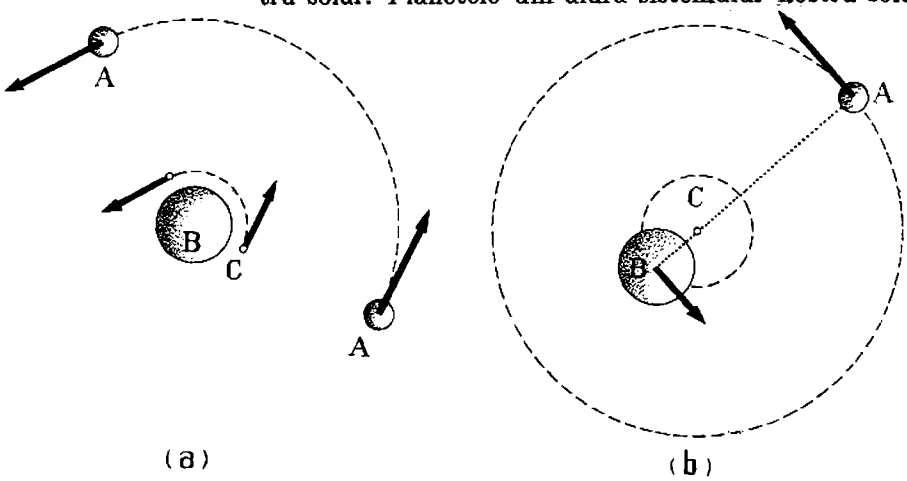


Fig. 8.2. (*a*) **Cu presupunerea că** B **este în repaus, centrul de masă** C **s-ar mișca pe o traiectorie circulară, ceea ce nu poate fi adevărat.** (*b*) **Mișcarea orbitală gravitațională se face astfel încît centrul de masă** C **al celor doi aștri să aibă o mișcare rectilinie și uniformă sau să fie în repaus**

Pămînt cu nici un fel de instrument optic și nici nu se întrevede, cel puțin în viitorul apropiat, vreo metodă de a observa aceste planete. Prin observarea mișcării stelelor pe bolta cerească se pun în evidență eventualele mișcări în jurul centrului de masă al vreunui sistem planetar și din aceasta se poate deduce existența unor planete.

8.2. Cîmpul gravitațional

Conform procedeului din teoria cîmpurilor, mărimea numită *cîmpul gravitațional* sau intensitatea cîmpului gravitațional se definește ca raportul dintre forța gravitațională F și masa m asupra căreia această forță acționează

$$g \equiv \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} = \frac{\Gamma}{r^2} \tag{8.2}$$

Constanta $\Gamma \equiv \gamma M$ este o mărime caracteristică unui astru, de exemplu în cazul Pămîntului

$$\Gamma = \gamma M = 3{,}99 \cdot 10^{14} \ \frac{m^3}{s^2}$$

Ținînd seama de relația (8.2) forța gravitațională se poate scrie

$$F = mg$$

și întrucît o forță este dată de produsul între masă și accelerație, $F = ma$, se obține semnificația cîmpului gravitațional: această mărime este accelerația cu care corpul de masă m se deplasează în cîmpul forței gravitaționale. Pentru acest motiv mărimea g se mai numește *accelerația gravitației.*

Cîmpul gravitațional g într-un punct dat este un vector, care are aceeași orientare cu aceea a forței gravitaționale

$$\vec{F} = m\vec{g} \tag{8.2'}$$

Vectorul $\vec{g}$ în punctul considerat are direcția verticalei fiind îndreptat spre centrul astrului respectiv.

La suprafața Pămîntului, ca și la suprafața oricărei planete, cîmpul gravitațional are expresia

$$g_s = \frac{\Gamma}{R^2} \tag{8.3}$$

unde R este raza planetei respective. Această valoare particulară a cîmpului gravitațional este o constantă pentru un anumit astru și se mai numește *accelerația gravitațională la suprafață.* În cazul Pămîntului accelerația gravitațională la suprafață este considerată constantă în înălțime, pînă la înălțimi de cca 50 km *. Această înălțime este destul de mare față de posibilitățile de mișcare ale mijloacelor folosite de om, dar foarte mică față de raza planetei. În această regiune forța gravitațională se numește *greutatea* G și relația (8.2') se scrie

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

Pentru calculul cîmpului gravitațional la suprafața unui astru, considerat ca o sferă de masă $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, unde ρ este densitatea medie a astrului, se scrie relația (8.3) sub forma

$$g_s = \frac{\Gamma}{R^2} = \gamma\frac{M}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\gamma R\rho \tag{8.4}$$

Considerînd doi aștri pentru care se cunosc razele R' și R'' precum și densitățile ρ' și ρ'', raportul între cîmpurile gravitaționale la suprafață va fi

$$\frac{g_s'}{g_s''} = \frac{R'}{R''}\,\frac{\rho'}{\rho''}$$

* Pînă la altitudinea de 50 km, accelerația gravitației variază cu 1%.

Tabelul 8.1

Cîteva mărimi caracteristice pentru calculul mărimilor gravitaționale din sistemul solar

Astrul	Masa kg	Raza medie m	Densitatea medie $\frac{kg}{m^3}$	Cîmpul gravitațional la suprafață $\frac{m}{s^2}$	$\Gamma = \gamma M$ $\frac{m^3}{s^2}$
Soarele	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	1 410	274	$1{,}33 \cdot 10^{20}$
Pămîntul	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	5 520	9,81	$3{,}99 \cdot 10^{14}$
Luna	$7{,}35 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	3 340	1,62	$4{,}90 \cdot 10^{12}$
Marte	$6{,}39 \cdot 10^{23}$	$3{,}37 \cdot 10^{6}$	3 990	3,72	$4{,}26 \cdot 10^{13}$
Venus	$4{,}86 \cdot 10^{24}$	$6{,}17 \cdot 10^{6}$	4 940	8,50	$3{,}24 \cdot 10^{14}$

În tabelul 8.1 sînt date mărimile caracteristice cîtorva corpuri din sistemul solar pentru calculul mărimilor gravitaționale.

În ceea ce privește mișcarea în cîmpul gravitațional sînt necesare cîteva considerații. Cel mai simplu mod de mișcare în cîmpul gravitațional este căderea liberă. Dacă se consideră diferite corpuri, de mase m_1, m_2, m_3, ... asupra lor acționează greutățile lor $G_1, G_2, G_3, \ldots$ Din relația (8.2') rezultă că

$$\frac{G_1}{m_1} = \frac{G_2}{m_2} = \frac{G_3}{m_3} = \ldots = g$$

adică toate corpurile cad în cîmpul gravitațional cu aceeași accelerație, care este accelerația gravitației. Pentru acest motiv timpul de cădere și deci viteza realizată, în cădere liberă sau pe planul înclinat în absența frecării, sînt independente de masa corpului respectiv. Prin cădere de la înălțimea h un corp atinge viteza v dată de binecunoscuta relație a lui Galilei

$$v = \sqrt{2gh}$$

Referitor la mișcarea pe suprafața unui astru, adică la mișcarea pe orizontală, aceasta se face datorită unei forțe imprimate care are rostul de a produce, la începutul mișcării, accelerația necesară pornirii și apoi, în timpul mișcării, de a învinge frecarea. Astfel în mișcarea pe orizontală, greutatea unui corp nu intervine ca forță în desfășurarea mișcării.

Un tip de mișcare în cîmpul gravitațional, foarte importantă, este aceea prin care un corp trebuie să ajungă la altitudine mare, față de suprafața astrului. Acest tip de mișcare depinde de existența sau absența unei atmosfere. Mișcările *independente de existența atmosferei* sînt:

— mișcarea prin aruncare — mișcarea balistică —, întîlnită de exemplu la aruncarea proiectilelor;

— mișcarea prin ejectarea gazelor, întîlnită la rachete.

Mișcările *dependente de existența atmosferei* sînt.

— mișcarea datorită forței lui Arhimede, întîlnită la mișcarea baloanelor;

— mișcarea datorită forței ascensionale (portanța), produsă de profilele aerodinamice, întîlnită la avioane.

Pentru mişcarea unui vehicul în cîmpul ravitaţional se va alege acel tip de mişcare care corespunde scopului propus. Astfel, pentru plecarea de pe suprafaţa unei planete fără atmosferă se poate folosi fie aruncarea navei printr-o explozie, fie lansarea ei cu o rachetă. Pentru obţinerea unei anumite viteze, în primul caz, este necesară o accelerare foarte mare, deoarece timpul exploziei este foarte scurt, pe cînd în al doilea caz este suficientă o accelerare mică, deoarece în timpul destul de lung al funcţionării rachetei se va obţine viteza dorită. Deşi aruncarea prin explozie necesită o cantitate mai mică de combustibil, decît propulsarea prin ejectarea continuă a gazelor (v. § 5.5), în cazul unei nave cu echipaj se preferă totuşi soluţia ultimă, care se caracterizează printr-o acceleraţie mică, deoarece organismul uman nu suportă acceleraţiile mari.

Plecarea unei aeronave de pe suprafaţa unui astru cu atmosferă se poate face fie prin decolarea orizontală a aeronavei, fie prin decolarea verticală a aeronavei, caracteristică elicopterelor sau rachetelor. La decolarea orizontală nu este necesar ca forţa imprimată să fie mai mare decît greutatea navei, $F_i < G$, pe cînd la decolarea verticală este absolut necesar ca forţa imprimată să depăşească greutatea navei, $F_i > G$. Este evident că în cel de-al doilea caz sînt necesare motoare mai puternice decît în primul caz; de aceea se alege soluţia care corespunde puterii motoarelor de care dispune tehnica într-o anumită etapă de dezvoltare, în funcţie de masa aeronavei.

În fine, enumerarea tipurilor de mişcări în cîmpul gravitaţional trebuie completată cu mişcarea pe orbita gravitaţională şi cu mişcarea care scoate o navă din cîmpul gravitaţional al unui astru. Aceste tipuri de mişcări fac obiectul astronauticii şi vor fi studiate în §§ 8.5 şi 8.6.

8.3. Mişcarea relativă în cîmpul gravitaţional

Mişcarea relativă în cîmpul gravitaţional este foarte importantă atît pentru rezolvarea problemelor curente ale tehnicii cît şi pentru domeniul astronauticii. Pentru studiul mişcării relative în cîmpul gravitaţional se recurge la un sistem de referinţă mobil O' constituit din cabina unui ascensor şi la un sistem de referinţă O legat de suprafaţa Pămîntului, sistemul presupus fix (fig. 8.3). Dacă cabina ascensorului se mişcă rectiliniu şi uniform, cum se întîmplă cînd cabina este acţionată printr-un cablu de către un motor cu turaţie constantă, sistemul O' al cabinei este un sistem inerţial; fenomenele care se desfăşoară în acest sistem au loc aşa cum s-a arătat în capitolul 3. Dacă mişcarea cabinei nu este rectilinie şi uniformă, ci are o altă formă, aşa cum se poate întîmpla în cîmpul gravitaţional, atunci sistemul O' nu mai este un sistem inerţial.

Se consideră un corp de masă m care se mişcă în interiorul cabinei, adică faţă de sistemul mobil O' neinerţial. Se va aplica sistemului neinerţial consideraţiile făcute în § 6.4 cu privire la forţele de inerţie. Considerînd pentru sistemul O axa Ox în sensul cîmpului gravitaţional (pentru ca $g > 0$), ecuaţia mişcării pentru corpul de masă m faţă de sistemul mobil O' al cabinei va fi

$$ma' = G + F_{in} \tag{8.5}$$

unde a' este acceleraţia corpului faţă de cabină, G este forţa fundamentală (greutatea corpului de masă m, adică $G = mg$) şi F_{in} este forţa de inerţie

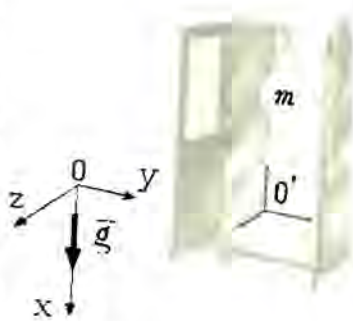


Fig. 8.3. Sistemul O' este legat de cabina care se deplasează faţă de sistemul O solidar cu suprafaţa Pămîntului; axa Ox are sensul acceleraţiei gravitaţionale $\vec{g}$

asupra corpului. Dacă mișcarea cabinei se face față de sistemul O cu accelerația de transport a_t, atunci $F_{in} = -ma_t$ și deci

$$ma' = G - ma_t = mg - ma_t = m\ (g - a_t)$$
$$a' = g - a_t \tag{8.6}$$

Relația (8.6) afirmă că accelerația a' a corpului față de sistemul mobil O' este egală cu diferența dintre accelerația gravitației și accelerația de transport a cabinei în mișcarea sa față de sistemul O. Aplicarea relației (8.6) la cîteva cazuri de mișcare ale sistemului O' față de sistemul O, cazuri întîlnite în practică, conduce la concluzii importante.

Se consideră în primul rînd căderea liberă a cabinei în cîmpul gravitațional; în acest caz $a_t = g$ și conform relației (8.6)

$$a' = g - g = 0$$

Accelerația a' a corpului față de cabină fiind zero, înseamnă că fie corpul se mișcă față de cabină rectiliniu și uniform, fie corpul este în repaus față de cabină. Cu alte cuvinte, corpul nu va cădea pe podeaua cabinei ci va rămîne oriunde în aer în stare de repaus, sau, dacă este aruncat cu un impuls oricît de mic, corpul va continua să se miște în orice direcție (chiar și spre plafonul cabinei) cu o mișcare rectilinie și uniformă. Forța care acționează asupra corpului de masă m este $ma' = 0$, ceea ce înseamnă că atîrnînd corpul de un cîntar dinamometric în cabină, cîntarul nu va indica nimic. În această situație, numită *imponderabilitate*, omul are nevoie să-și însușească deprinderi cu totul speciale, diferite de acelea pe care le execută în condițiile de la suprafața Pămîntului, unde domnește peste tot accelerația gravitației g.

În al doilea rînd se consideră că asupra cabinei acționează o forță imprimată F_t mai mare decît forța gravitațională G, și cu același sens. O mișcare similară este aceea a unui avion în picaj sau a unei rachete propulsată de motoare spre sol. Dacă $F_t > G$, înseamnă că $a_t > g$ și relația (8.6) va da

$$a' = g - a_t < 0$$

Accelerația a' a corpului în mișcare față de cabină este negativă, adică are sensul x-ilor negativi. Prin alegerea axei Ox ca în figura 8.3 înseamnă că accelerația a' este îndreptată spre plafonul cabinei, deci corpul din interiorul cabinei are o mișcare accelerată spre plafonul cabinei. Totul „cade" pe plafon!

În fine, în al treilea rînd se consideră o forță imprimată care are sens invers forței gravitaționale, adică are sensul x-ilor negativi. O mișcare similară este aceea a lansării verticale a unei rachete. În acest caz accelerația de transport este negativă, $a_t < 0$ și din relația (8.6) rezultă

$$a' = g - (-a_t) = g + a_t$$

adică $a' > g$ și $a' > 0$. Accelerația a' a corpului față de cabină este mai mare decît accelerația gravitației avînd același sens cu g. Cu alte cuvinte, în acest caz, corpul se deplasează în interiorul cabinei spre podea cu o accelerație mai mare decît g. Dacă corpul stă pe podea, apasă pe aceasta cu forța $ma' = m(g + a_t)$ mai mare decît greutatea mg a corpului la suprafața Pămîntului. În aceste condiții un corp atîrnat de un cîntar dinamometric arată o greutate mai mare decît arată același cîntar situat în repaus la suprafața Pămîntului.

8.4. Lucrul forței gravitaționale

Înainte de a trece la calculul lucrului unei forțe de cîmp, cum este forța gravitațională, trebuie precizat că un corp se poate deplasa într-un cîmp *fie sub acțiunea forței de cîmp, fie în contra acestei forțe*, așa cum se întîmplă dacă acelui corp i se aplică o forță imprimată. Pentru mișcarea în sensul opus forței gravitaționale, forța imprimată care se aplică corpului trebuie să fie la început mai mare decît forța gravitațională, pentru a pune corpul în mișcare, iar apoi, pentru continuarea mișcării este suficient ca forța imprimată să fie egală cu forța gravitațională. Iată un exemplu. În cîmpul gravitațional un corp cade de la o înălțime dată sub acțiunea forței gravitaționale (greutatea sa); forța de cîmp a efectuat lucrul L. Dar acel corp poate fi ridicat la aceeași înălțime, aplicînd corpului o forță imprimată egală cu greutatea sa, dar de sens contrar greutății; lucrul forței imprimate va fi egal cu lucrul forței gravitaționale, dar prin convenție va fi de semn contrar și va fi notat $-L$. În cele ce urmează se va calcula lucrul *efectuat de forța gravitațională*.

Fie un corp de masă m care se găsește la distanța r' de centrul unui astru; sub acțiunea forței gravitaționale $\vec{F}$ corpul cade pînă la distanța r'' de centrul astrului ($r' > r''$). Lucrul efectuat de forța $\vec{F}$ va fi

$$L = \int_{r'}^{r''} \vec{F}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{r'}^{r''} F(r) \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos\alpha$$

Se scrie $\vec{F}(r)$ și respectiv $F(r)$ pentru a arăta că forța nu este constantă ci depinde de distanța r la centrul astrului. Pentru efectuarea integralei este necesar să se cunoască forma drumului între pozițiile caracterizate prin r_1 și r_2. Această formă a drumului depinde de faptul dacă corpul se deplasează liber, nesupus la legături, sau dacă execută o mișcare supusă la legături. Aceste două cazuri vor fi tratate separat.

Corpul *nesupus la legături*, deci în cădere liberă, are o deplasare pe direcția forței $\vec{F}$, prin urmare unghiul α este egal cu zero, $\cos\alpha = 1$, așa cum se vede în figura 8.4. Elementul de drum $\mathrm{d}\vec{s}$ este în direcția distanței r, adică este chiar $\mathrm{d}r$ și deci se obține

$$L = \int_{r'}^{r''} F(r) \cdot \mathrm{d}r$$

Fig. 8.4. Corpul de masă m cade de la distanța r', față de centrul astrului, la distanța r'', sub acțiunea forței gravitaționale $\vec{F}$

Expresia forței gravitaționale este $\Gamma\, m/r^2$ și lucrul forței gravitaționale este

$$L = \Gamma\, m \int_{r'}^{r''} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \Gamma m \left| -\frac{1}{r} \right|_{r'}^{r''} = \Gamma m \left(-\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'} \right) \qquad (8.7)$$

Se definește *energia potențială* a unui corp de masă m care se află în cîmpul gravitațional la distanța r de centrul astrului prin relația

$$U \equiv -\frac{\Gamma m}{r} \qquad (8.8)$$

astfel încît energia potențială să fie maximă ($U = 0$) la distanță foarte mare ($R \to \infty$) și minimă la suprafața planetei ($U \to$ minim cînd $R \to$ minim), cum se vede în figura 8.5. Cu această definiție a energiei potențiale, se poate spune că un corp lăsat liber în cîmpul gravitațional cade de la U_{maxim} la U_{minim}. Starea de repaus, sau cu alte cuvinte *echilibrul stabil al unui corp se realizează la energie potențială minimă.* Cu expresia energiei potențiale lucrul forței gravitaționale, pe distanța $r' \to r''$, dat de (8.7) se scrie

$$L_{r' \to r''} = U_f - U_i \tag{8.9}$$

și este deci egal cu diferența dintre energia potențială finală U_f și energia potențială inițială U_i a corpului. Deoarece $U_i > U_f$ rezultă că prin căderea unui corp are loc scăderea energiei sale potențiale. Pe de altă parte se știe că lucrul are ca efect creșterea energiei cinetice a corpului. Prin urmare prin căderea unui corp în cîmpul gravitațional (sub acțiunea greutății sale) energia cinetică crește în timp ce energia potențială scade. Cu cît înălțimea de la care corpul cade este mai mare, cu atît lucrul greutății este mai mare, prin urmare energia cinetică atinge o valoare mai mare (viteza de cădere mai mare), iar scăderea energiei potențiale va fi mai mare. Invers, dacă se aplică corpului o forță exterioară, lucrul executat de această forță din exterior care se cheltuiește tocmai pentru ridicarea corpului la o anumită înălțime, are ca efect creșterea energiei potențiale.

Punînd $|U_f - U_i| = \Delta U$ și știind că $U_i > U_f$ rezultă $U_f - U_i = -\Delta U$; relația (8.9) se poate scrie

$$L = -\Delta U \tag{8.10}$$

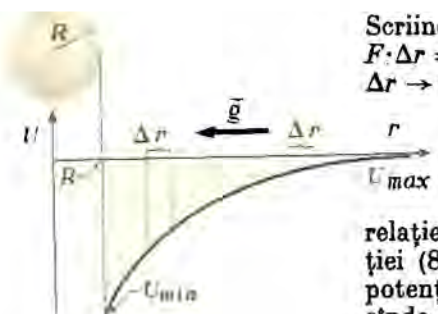


Fig. 8.5. Variația energiei potențiale U definită prin relația (8.8) în funcție de distanța r la centrul astrului. Se observă că cîmpul gravitațional $\vec{g}$ are sensul energiilor potențiale descrescînde. Unei variații Δr a distanței r îi corespunde o variație a energiei potențiale mai mare în apropierea astrului decît aceea de la o depărtare mai mare de astru

Scriind lucrul pentru o deplasare elementară Δr sub forma $F \cdot \Delta r$ rezultă $F \cdot \Delta r = -\Delta U$. Expresia forței $F = -\Delta U/\Delta r$ are la limită, adică pentru $\Delta r \to \mathrm{d}r$, forma

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \tag{8.11}$$

relație extrem de importantă în teoria cîmpurilor. Din interpretarea relației (8.11) rezultă faptul că forța gravitațională este dată de variația energiei potențiale a corpului cu distanța r, și are sensul energiilor potențiale descrescînde (cîmpul gravitațional este îndreptat de la energie potențială mare la energie potențială mică, v. fig. 8.5). Un exemplu va lămuri mai bine relația (8.11). Pentru cazul ilustrat în figura 8.5 se alege un Δr dat, de exemplu egal cu 100 metri, la două altitudini, aproape de suprafața astrului (r mic) și la o valoare mare a distanței r. Din figură se observă că acestui Δr îi corespunde o variație a energiei potențiale, ΔU, mare la r mic și mică la r mare. Întrucît F este proporțional cu ΔU, înseamnă că aproape de suprafața astrului F este mare, iar la altitudine mare F este mic, cum era de așteptat, deoarece forța F variază invers proporțional cu pătratul distanței r.

Relația scalară (8.11) reprezintă o relație între modulele vectorilor din relația vectorială

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \tag{8.11'}$$

a cărei demonstraţie se face în analiza vectorială. Această expresie afirmă că gradientul energiei potenţiale adică direcţia de variaţie maximă a energiei U este identică cu direcţia forţei gravitaţionale. Cu alte cuvinte, un corp lăsat să cadă „la vale", urmează o singură traiectorie şi anume aceea cu panta maximă.

Un corp *supus la legături,* va avea în cîmpul gravitaţional o mişcare care se datoreşte atît forţei gravitaţionale, cît şi reacţiunilor legăturilor. De exemplu, pe o cale ferată şerpuită şi care se află în pantă, un vagonet urmează sub acţiunea greutăţii sale un drum care este cel impus de legături. Lucrul forţei gravitaţionale $\vec{F}$ pe un drum oarecare al cărui element de lungime este $\vec{ds}$, va fi

$$L = \int \vec{F} \cdot \vec{ds} \tag{8.12}$$

Se poate spune că în calculul lucrului contează numai componenta forţei după deplasare, întrucît componenta normală este anulată de reacţiunea legăturii. În cazul cîmpului gravitaţional, dacă α este unghiul dintre deplasarea $\vec{ds}$ şi direcţia verticalei (adică direcţia forţei $\vec{F}$) rezultă $ds \cdot \cos\alpha = dr$, ceea ce face ca expresia lucrului (8.12) să devină identică cu (8.9),

$$L = \int \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int F \cdot dr = U_f - U_i$$

Prin urmare, atît în cazul corpului nesupus la legături cît şi în acela al corpului supus la legături, în cîmpul gravitaţional, lucrul forţei gravitaţionale *nu depinde de drum,* ci este funcţie numai de diferenţa energiilor potenţiale din starea finală şi din starea iniţială a corpului. Aceasta înseamnă că *forţa gravitaţională este o forţă conservativă* (§ 6.7). În figura 8.6 sînt arătate trei traiectorii de cădere pe înălţimea h; în toate cele trei cazuri lucrul este acelaşi ($U_f - U_i$ este aceeaşi) şi deci viteza obţinută de corpul în cădere este aceeaşi, pentru că efectul lucrului este creşterea vitezei corpului.

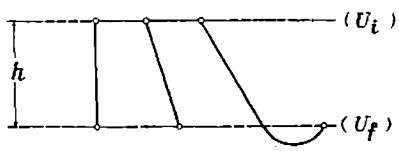


Fig. 8.6. Lucrul forţei gravitaţionale nu depinde de drum, ci numai de variaţia energiei potenţiale între starea iniţială şi starea finală

În regiunea apropiată de suprafaţa unui astru în care se consideră acceleraţia gravitaţiei constantă (v. § 8.2) şi deci forţa gravitaţională constantă, expresia lucrului devine

$$L = \int F \cdot dr = F \int dr = F \cdot h$$

unde h este distanţa pe verticală pe care se deplasează corpul pentru care se calculează lucrul L. Întrucît în această regiune forţa gravitaţională este tocmai greutatea G a corpului expresia de mai sus devine

$$L = Gh = mgh \tag{8.13}$$

Această expresie este binecunoscută din fizica de liceu.

8.5. Mişcarea pe orbita gravitaţională

Fie un corp de masă m, de exemplu un satelit sau o navă spaţială, pe o orbită circulară de rază R în jurul unui astru. În § 8.1 s-a arătat că această mişcare se datoreşte unui *echilibru dinamic* şi anume egalităţii între forţa

centripetă, care este forța gravitațională $m\Gamma/R^2$ și forța de inerție centrifugă mV^2/R,

$$\frac{m\Gamma}{R^2} = \frac{mV^2}{R}$$

unde V este viteza corpului pe orbita circulară măsurată față de un sistem de referință O presupus fix. De exemplu, pentru un satelit în jurul Pămîntului, sistemul de referință O nu este legat de Pămînt, deoarece această planetă are o mișcare de rotație proprie, ci este legat de stelele fixe sau de centrul Soarelui. Din expresia de mai sus rezultă că viteza V este

$$V = \sqrt{\frac{\Gamma}{R}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{R_0 + h}} \tag{8.14}$$

unde R_0 este raza astrului și h altitudinea la care se află corpul față de suprafața astrului. Se observă că viteza V este invers proporțională cu „înălțimea de zbor" h, corpul avînd o viteză V cu atît mai mare cu cît altitudinea h este mai mică. Considerînd Pămîntul ca astru și altitudinea la care se mișcă corpul pe orbita circulară, $h = 0$ (zbor „la vîrful copacilor") viteza V are valoarea particulară

$$V_1 = \sqrt{\frac{\Gamma}{R_{0.P}}} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Viteza V_1 se numește, în astronautică, *prima viteză cosmică*, fiind viteza necesară unui corp pentru a se plasa pe orbita cea mai joasă din jurul Pămîntului.

Mișcarea pe orbita gravitațională circulară față de sistemul de referință O poate fi caracterizată și prin perioada de rotație T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{R}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\Gamma}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_0 + h)^3}{\Gamma}} \tag{8.15}$$

perioada de rotație T este cu atît mai mare, cu cît altitudinea orbitei este mai mare. Perioada de rotație minimă T_0 este cea corespunzătoare rotației în jurul Pămîntului pe orbita cea mai joasă, pentru $h = 0$,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R_{0,P}^3}{\Gamma}} = 85 \text{ min}$$

Majoritatea sateliților artificiali lansați în jurul Pămîntului au altitudinea h a orbitei în jurul valorii de 100 km. Deoarece această valoare este foarte mică față de raza Pămîntului, calculul perioadei de rotație conduce la valoarea T_0 de 85 minute, valoarea observată și experimental. Sateliții artificiali lansați în jurul Pămîntului pe orbite cu altitudini mai mari au perioadele de rotație T mai mari. Este interesant cazul orbitei pentru care perioada T este tocmai egală cu perioada de rotație a Pămîntului în jurul axei sale $Tr = 23{,}93 \text{ h} = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$. Pentru această valoare a lui T relația (8.15) conduce la

$$R_0 + h = 45\,000 \text{ km} \cong 7 \text{ R}_0$$

Un asemenea satelit, avînd aceeaşi perioadă de rotaţie cu un punct de pe suprafaţa Pămîntului este în repaus relativ faţă de acel punct. Pentru telecomunicaţii sateliţii artificiali pe orbita cu $T = 23{,}93$ h, numiţi sateliţi staţionari, prezintă un interes cu totul special; aceşti sateliţi servesc drept staţii de retransmitere pentru emisiunile de radio şi televiziune. Asemenea sateliţi se găsesc în permanenţă deasupra oceanului Atlantic şi a oceanului Pacific pentru legătura prin telecomunicaţii între continente. Relaţia (8.15) se aplică oricărui satelit în jurul unui astru; ea se aplică deci şi perioadei de rotaţie a Lunei în jurul Pămîntului. Deoarece Luna se mişcă în jurul Pămîntului pe o orbită gravitaţională cu $R = 60\ R_0$, relaţia (8.15) conduce la

$$T = 28\ d$$

care este perioada de rotaţie a Lunii faţă de sistemul de referinţă O presupus fix.

Energia totală W a unui corp care se mişcă cu viteza V pe o orbită circulară de rază R în jurul unui astru se calculează ca suma între energia cinetică E şi energia potenţială U

$$W = E + U = \frac{mV^2}{2} - \frac{m\Gamma}{R} = m\left(\frac{\Gamma}{2R} - \frac{\Gamma}{R}\right) = -\,m\,\frac{\Gamma}{2R} \qquad (8.16)$$

Pentru exprimarea vitezei V s-a folosit relaţia (8.14) iar pentru energia potenţială relaţia (8.8). Din examinarea relaţiei (8.16) rezultă următoarele două proprietăţi ale mişcării pe orbita gravitaţională circulară.

— energia cinetică este egală cu jumătate din valoarea absolută a energiei potenţiale, $E = \frac{1}{2}\,|\,U\,|$,

— energia totală este egală, în valoare absolută, cu energia cinetică şi deci cu jumătate din energia potenţială, $|\,W\,| = E = \frac{1}{2}\,|\,U\,|$.

În figura 8.7 sînt reprezentate grafic energiile (totală W, cinetică E şi potenţială U) ale unui corp în mişcare pe o orbită circulară de rază $R = R_0 + h$, în funcţie de raza R a orbitei. Figura 8.7 conţine toată informaţia necesară calculului energetic pentru plasarea pe orbită, mişcarea pe orbită, frînarea şi readucerea pe suprafaţa astrului respectiv a unui corp. Astfel, pentru a plasa un satelit pe orbita de rază R trebuie să i se dea energia totală W corespunzătoare orbitei cu raza R. Pe sol, în repaus, satelitul are energia potenţială U_0 corespunzătoare razei R_0. Dacă i se dă creşterea de energie egală cu $W_0 - U_0$ atunci satelitul se poate plasa pe orbita cea mai joasă, adică pe orbita cu $R = R_0$ sau $h = 0$; pe această orbită energia totală este W_0, arătată şi în figura 8.7. Dacă i se dă creşterea de energie egală cu $W - U_0$ atunci satelitul se poate plasa pe orbita cu raza R.

Din consideraţiile făcute rezultă că pentru lansarea, de la sol, a unui satelit pe orbita cu raza R şi căreia îi corespunde energia totală W, este necesară energia W_l numită *energia de lansare*

$$W_l = W - U_0 = E + U - U_0 = E + \Delta U \qquad (8.17)$$

unde $\Delta U = U - U_0$ este diferența dintre energia potențială U a unui corp corespunzătoare înălțimii R și energia potențială U_0 a corpului la suprafața solului. Cu alte cuvinte, ΔU este energia potențială pe care o capătă un corp cînd este aruncat de la sol la înălțimea h; pentru altitudini h mici, în cazul în care $g = \text{const}$, $\Delta U = mgh$.

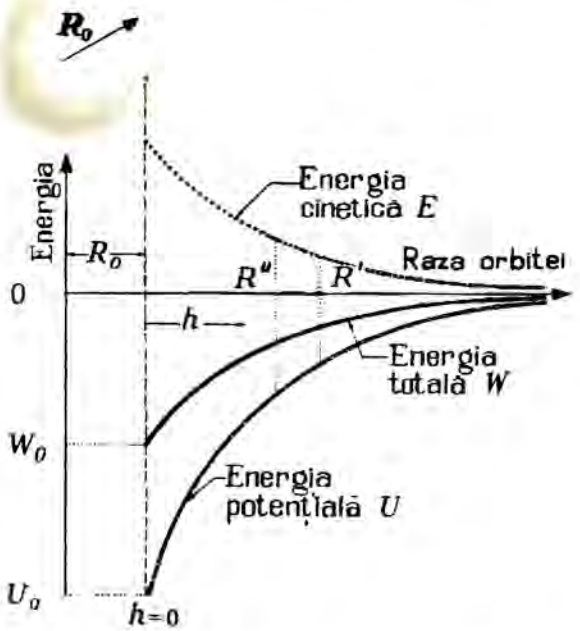


Fig. 8.7. Dependența energiei cinetice, a energiei totale și a energiei potențiale de distanța la centrul astrului, pentru o orbită circulară în cîmpul gravitațional

În tabelul 8.2 sînt date valorile energiilor necesare pentru calculul mărimii W_t; aceste energii sînt raportate la unitatea de masă și sînt calculate pentru cîteva orbite de diferite altitudini h. Din valorile date în tabelul 8.2, se observă că pe o orbită cu h mic, mărimea $\Delta U/m$ este foarte mică în comparație cu energia cinetică E/m, pe cînd pe o orbită cu h mare, variația energiei potențiale $\Delta U/m$ predomină față de energia cinetică E/m; la h mare viteza pe orbită este mică, conform relației (8.14) și de aceea energia cinetică, în acest caz, rămîne redusă.

Dacă un satelit se găsește pe orbita de rază R', acesta poate să piardă în timp energie fie din cauza frecării cu aerul, chiar așa cum este de rarefiat la altitudinea respectivă, fie din cauza ciocnirilor cu meteoriți. Din aceste motive, energia totală W' a satelitului pe orbita de rază R' (v. fig. 8.7) se micșorează și în lipsa unei alte surse de energie, satelitul va cădea pe o orbită cu raza R'' ($R'' < R'$), căreia îi corespunde energia totală $W'' < W'$. Din figura 8.7 se observă că scăderea razei orbitei circulare are ca rezultat creșterea energiei cinetice a satelitului și, prin urmare, o viteză pe traiectorie mai mare. Comportarea satelitului care pierde energie, pare paradoxală la prima vedere; scăderea energiei totale conduce la căderea satelitului pe o orbită cu rază mai mică și cu o viteză pe orbită mai mare. Dar această comportare se explică pe baza dependenței de raza orbitei a energiilor totale

Tabelul 8.2

Energia cinetică $E/m = \Gamma/[2(R_0 + h)]$, energia potenţială $U/m = \Gamma/(R_0 + h)$, variaţia energiei potenţiale $\Delta U/m = (U - U_0)/m$ şi energia de lansare $(E + \Delta U)/m$, raportate la masă, pentru un corp pe orbita de altitudine h, în jurul Pămîntului ($\Gamma = 4 \cdot 10^{14}$ m³/s²)

h km	$R_0 + h$ km	$\frac{E}{m} = \frac{\Gamma}{2(R_0+h)}$ MJ/kg	$\frac{U}{m} = \frac{\Gamma}{R_0+h}$ MJ/kg	$\frac{\Delta U}{m}$ MJ/kg	$\frac{E + \Delta U}{m}$ MJ/kg
0	6 360	32	−63	0	—
100	6 460	31	−62	1	32
200	6 560	30	−60	3	33
500	6 860	29	−58	5	34
1 000	7 360	27	−54	9	36
2 000	8 360	24	−48	15	39
3 000	9 360	21	−43	20	41
1 R_0 = 6 360	12 720	15	−31	32	47
2 R_0 = 12 720	19 080	10	−21	42	52
10 R_0 = 63 600	69 960	2,8	− 5,7	57	60
60 R_0 = 381 600	387 960	0,5	− 1,0	62	62,5

şi cinetice, aşa cum rezultă din figura 8.7. Creşterea energiei cinetice se face în contul energiei potenţiale, care scade foarte mult.

Pentru cele ce urmează, este necesar să fie examinat aspectul energetic al readucerii unui satelit sau al unei nave, de pe orbita circulară din jurul unui astru pe suprafaţa acestuia. Din punct de vedere energetic readucerea de la orbita de altitudine h la suprafaţa astrului înseamnă scăderea energiei corpului cu cantitatea $W_l = E + \Delta U$, adică tocmai cu energia de lansare. Dacă astrul are atmosferă, frecarea corpului cu păturile atmosferice poate produce frînarea lui; prin transformarea energiei de lansare W_l în energie termică corpul pierde energia W_l pe care o are pe orbită. În ceea ce priveşte această transformare trebuie făcută următoare precizare. Dacă transformarea energiei corpului în energie termică se face cu încetul, adică printr-o frînare progresivă, energia termică care apare pe corp îi ridică temperatura la valori la care nu se produce vreo deteriorare a satelitului sau a navei. Dacă transformarea energiei W_l în energie termică, se face repede aşa cum se întîmplă cînd corpul intră repede în păturile atmosferice, temperatura acestuia se ridică atît de mult încît se produce „vaporizarea" satelitului sau a navei. Această ultimă situaţie este cea mai des întîlnită; orice satelit artificial în jurul Pămîntului, ca şi meteoriţii care vin din afara atmosferei Pămîntului, cînd se întîlnesc cu păturile atmosferice încep să fie frînaţi şi transformarea energiei lor în energie termică conduce la vaporizarea lor.

Dacă astrul nu are atmosferă readucerea unui satelit sau a unei nave de pe o orbită circulară pe suprafaţa astrului se face prin frînarea cu ajutorul motoarelor cu reacţie. Energia consumată de motoare trebuie să fie egală cu energia de lansare corespunzătoare orbitei pe care se află corpul sau nava.

Notă

În ceea ce privește lansarea de la suprafața Pămîntului, în vederea plasării unui corp (satelit artificial, navă etc.) pe o orbită circulară, trebuie precizat că lansarea se face pe verticală, deoarece frecarea cu aerul atmosferic consumă o bună parte din energia furnizată de motoare. De la lansare viteza crește treptat pînă în momentul în care încetează funcționarea motoarelor. Înainte de încetarea funcționării motoarelor, traiectoria rachetei este modificată astfel încît să se facă înscrierea pe orbita circulară. Punctul în care racheta intră pe orbita circulară se numește *punct de injecție*, iar viteza pe care racheta o are în *punctul de injecție* se numește *viteză de injecție*. Punctul de injecție este caracterizat printr-o anumită altitudine; acestei altitudini îi corespunde o anumită valoare a vitezei pe orbita circulară, conform relației (8.14). Pentru înscrierea corpului pe orbita circulară de altitudinea corespunzătoare punctului de injecție este necesar ca viteza de injecție să fie egală cu viteza V dată de relația (8.14).

La calcularea vitezei de injecție, mai trebuie avut în vedere că și punctul de lansare se mișcă în spațiu, datorită mișcării de rotație a Pămîntului în jurul axei sale. Ca urmare, viteza de injecție V_i se obține prin teorema de compunere a vitezelor (v. § 3.3) și anume din compunerea vitezei de transport v a punctului de lansare și a vitezei relative w a rachetei față de suprafața Pămîntului, viteză pe care motoarele o imprimă rachetei,

$$V_i = v \pm w$$

Semnul plus sau minus este impus de sensul de lansare și anume semnul plus se folosește cînd lansarea are loc spre răsărit, deoarece în acest caz racheta este lansată în același sens cu sensul de rotație al Pămîntului, iar semnul minus se folosește cînd lansarea are loc spre apus. De exemplu, un punct de pe Ecuatorul pămîntesc are viteza de transport $v = 500$ m/s, ceea ce înseamnă că la o putere dată a motoarelor unei rachete, adică unei viteze relative w date, îi corespunde viteza de injecție $V_i = 500 + w$, pentru lansarea rachetei spre răsărit și viteza de injecție $V_i = 500 - w$ pentru lansarea aceleiași rachete spre apus. De aici rezultă că pe Pămînt, sînt mai avantajoase lansările spre răsărit, deoarece motorul rachetei trebuie să imprime numai viteza $w = V_i - 500$. De exemplu, pentru înscrierea pe orbita circulară cu altitudinea minimă, este necesar ca viteza de injecție să fie egală cu prima viteză cosmică, 7 900 m/s, și deci motoarele vor trebui să imprime rachetei numai $w = 7\,900 - 500 = 7\,400$ m/s.

8.6. Evadarea din cîmpul gravitațional

Obiectul astronauticii nu constă numai în plasarea unui corp pe o orbită în jurul unui astru, ci și în scoaterea unui corp de sub acțiunea cîmpului gravitațional al unui astru, operație numită pe scurt: evadarea din cîmpul gravitațional.

Energia de evadare, adică energia necesară unui corp pentru a ajunge la limita cîmpului gravitațional al unui astru, se poate obține din relația (8.17) în care se pune condiția $R \to \infty$. Cu alte cuvinte, energia de evadare este energia de lansare necesară unui corp pentru a ajunge la distanța R infinit de mare; notînd energia de evadare cu $W_{i\infty}$, din relația (8.17) rezultă

$$W_{i\infty} = E_\infty + U_\infty - U_0 = -U_0$$

căci energia cinetică E_∞ pentru orbita cu raza infinit de mare și energia potențială U_∞ corespunzătoare distanței, de la centrul astrului, infinit de mare,

sînt ambele egale cu zero. Folosind expresia energiei potențiale dată de relația (8.8), energia de evadare de la suprafața astrului se scrie

$$W_{l\infty} = \frac{m\Gamma}{R_0}$$

Energia de evadare a unui corp de la suprafața unui astru este egală, în valoare absolută, cu energia potențială a corpului la suprafața astrului; acest rezultat concordă cu acela obținut din figura 8.7. Pentru ca un corp să ajungă la limita cîmpului gravitațional ($R \to \infty$) este necesar ca energia sa totală să ajungă egală cu zero și acest lucru este posibil dacă corpul primește la lansare energia U_0, adică diferența ordonatelor corespunzătoare celor două stări, starea inițială cu energia U_0 și starea finală cu energia egală cu zero. Din tabelul 8.2 se observă, de asemenea, că energia de lansare pentru altitudine foarte mare este egală, în valoare absolută, cu energia potențială la $h = 0$.

Scriind energia $W_{l\infty}$ ca energie cinetică $\frac{1}{2} m V^2_{e,R_0}$ pe care corpul trebuie să o primească la lansare, unde V_{e,R_0} este viteza de evadare de la suprafața astrului ($R = R_0$) rezultă

$$\frac{1}{2} m V^2_{e,R_0} = \frac{m\Gamma}{R_0}$$

și deci

$$V_{e,R_0} = \sqrt{\frac{2\Gamma}{R_0}} = \sqrt{2} \cdot V_{R_0} \tag{8.18}$$

V_{R_0} este viteza pe orbita circulară cu raza cea mai mică, așa cum reiese din relația (8.14) punînd $h = 0$.

Viteza de evadare de la suprafața astrului este o constantă pentru un anumit astru, astfel în cazul Pămîntului

$$V_{e,R_\oplus} = \sqrt{2} \cdot V_{R_\oplus,P} = \sqrt{2} \cdot V_1 = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

unde V_1 este prima viteză cosmică, calculată în § 8.5. Viteza de evadare de la suprafața Pămîntului se numește *a doua viteză cosmică*; cu această viteză un corp lansat de la suprafața Pămîntului evadează din cîmpul gravitațional al planetei noastre. În tabelul 8.3 sînt date vitezele de evadare de la suprafața cîtorva aștri din sistemul solar.

Relația (8.18) exprimă viteza de evadare de la suprafața unui astru, dar în astronautică este importantă și viteza de evadare de la distanța R de centrul astrului, definită prin relația

$$V_{e,R} \equiv \sqrt{\frac{2\Gamma}{R}} = \sqrt{\frac{2\Gamma}{R_0 + h}} < V_{e,R_\oplus} \tag{8.19}$$

Viteza de evadare de la distanța R de centrul astrului este mai mică decît viteza de evadare de la suprafața astrului, și anume cu atît mai mică cu

cît distanța față de centrul astrului, de la care este lansat corpul în vederea evadării, este mai mare. Această dependență este ilustrată în cazul Pămîntului în figura 8.8, unde este reprezentată viteza V pe o orbită circulară, dată de relația (8.14) și viteza de evadare $V_{e,R}$, de la distanța R, dată de relația (8.19), ambele în funcție de distanța R.

Tabelul 8.3

Vitezele de evadare de la suprafața cîtorva aștri din sistemul solar

Astrul	V_{e,R_0} m/s
Soarele	$610 \cdot 10^3$
Mercur	$4{,}3 \cdot 10^3$
Venus	$10{,}4 \cdot 10^3$
Marte	$5{,}1 \cdot 10^3$
Jupiter	$60{,}8 \cdot 10^3$
Pămînt	$11{,}2 \cdot 10^3$
Luna	$2{,}4 \cdot 10^3$

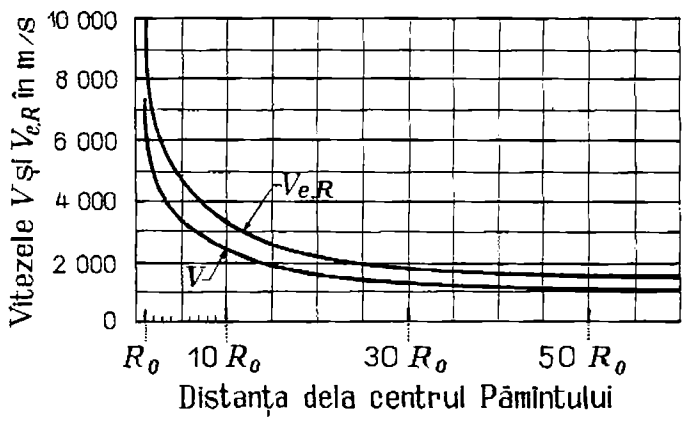


Fig. 8.8. Viteza V pe o orbită circulară și viteza de evadare de la distanța R, $V_{e,R}$, ambele în funcție de distanța R de la centrul Pămîntului, distanță exprimată în funcție de R_0, raza Pămîntului

Două exemple vor sublinia importanța vitezei de evadare în astronautică. Din figura 8.8 se citește că viteza de evadare a unui corp din cîmpul gravitațional al Pămîntului, la distanța Pămînt—Lună este $V_{e,R} = 1\,400$ m/s. O navă lansată de pe suprafața Lunii cu viteza de evadare 2 400 m/s (v. tabelul 8.3) ajunge la limita cîmpului gravitațional al Lunii, dar rămîne sub acțiunea cîmpului gravitațional al Pămîntului. Pentru ca nava să poată evada și din cîmpul gravitațional al Pămîntului, la distanța Pămînt—Lună, îi este necesară viteza de evadare suplimentară de 1 400 m/s. Al doilea exemplu se referă la o navă cosmică care ar fi lansată de la suprafața Pămîntului și ar avea drept țintă un astru exterior sistemului solar. Pentru evadarea din cîmpul gravitațional al Pămîntului, nava lansată de la suprafața Pămîntului are nevoie de viteza de evadare $11{,}2 \cdot 10^3$ m/s (v. tabelul 8.3). Cu această viteză nava ajunge la limita cîmpului gravitațional al Pămîntului, dar rămîne sub acțiunea cîmpului gravitațional al Soarelui. Pentru evadarea din cîmpul gravitațional al Soarelui la distanța Soare—Pămînt ($R_{SP} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m) este necesară viteza

$$V_{e,R_{SP}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Gamma_S}{R_{SP}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{20}}{1{,}5 \cdot 10^{11}}} = 42 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

folosind constanta Γ_S pentru Soare din tabelul 8.1.

Această viteză de evadare se numește *a treia viteză cosmică*; se observă valoarea relativ mare a acestei viteze cosmice față de celelalte două. Este

adevărat că se poate folosi avantajos viteza Pămîntului pe orbită care este $30 \cdot 10^3$ m/s, și anume prin lansarea navei în același sens cu mișcarea Pămîntului pe orbită, motoarele trebuie să imprime navei numai viteza de

$$42 \cdot 10^3 - 30 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Notă

În nota de la § 8.5 s-a arătat că un corp are în punctul de injecție o viteză numită viteza de injecție. Valoarea vitezei de injecție V_i determină forma traiectoriei unui corp, în cîmpul gravitațional al unui astru. Fie π punctul de injecție (fig. 8.9) caracterizat printr-o anumită altitudine față de suprafața astrului. Acestei altitudini îi corespunde o viteză V pe orbita circulară conform relației (8.14) și o viteză de evadare $V_{e,R}$, de la distanța $R = R_0 + h$, conform relației (8.19). În mecanica teoretică se demonstrează că în funcție de valoarea vitezei de injecție V_i, față de valorile V și $V_{e,R}$ sînt posibile diferite forme ale traiectoriilor unui corp în cîmpul gravitațional al astrului P; aceste traiectorii sînt arătate în figura 8.9.

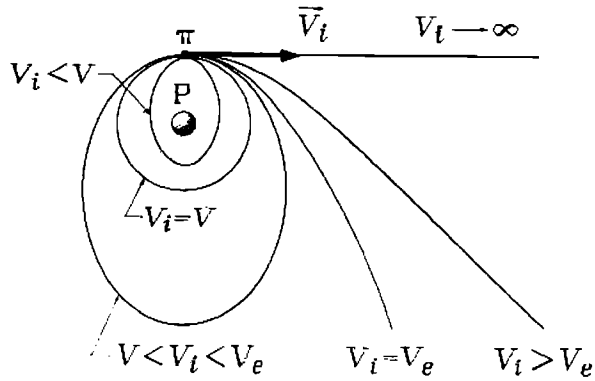


Fig 8.9. Traiectoriile posibile în cîmpul gravitațional, pentru diferite valori ale vitezei de injecție V_i. Pentru $V_i < V$ traiectoria este o elipsă cu Pămîntul în focarul depărtat. Pentru $V_i = V$ traiectoria este un cerc. Pentru $V < V_i < V_e$ traiectoria este o elipsă cu Pămîntul în focarul apropiat. Pentru $V_i = V_e$ traiectoria este o parabolă iar pentru $V_i > V_e$ traiectoria este o hiperbolă

Dacă viteza de injecție este mai mică decît viteza V, corpul se mișcă pe o elipsă cu astrul P în focarul depărtat de punctul de injecție, iar dacă viteza V_i este mai mare decît viteza V dar mai mică decît viteza de evadare, corpul se mișcă pe o elipsă cu astrul P în focarul apropiat de punctul π. Dacă viteza de injecție este egală cu viteza de evadare corespunzătoare punctului de injecție, $V_{e,R}$, corpul se depărtează de astrul P pe o parabolă, iar dacă $V_i > V_{e,R}$ traiectoria corpului este o hiperbolă.

Orbitele închise din figura 8.9, și anume cele două elipse și cercul, trec prin punctul de injecție π. Acest punct nu rămîne însă fix față de suprafața Pămîntului, din cauza mișcării de rotație a Pămîntului; vitezele calculate V_i, V și $V_{e,R}$ sînt considerate față de sistemul de referință O, diferit de sistemul O' legat de Pămînt.

O navă cosmică ajunsă în cîmpul gravitațional al altui astru își va modifica traiectoria. În funcție de viteza inițială a navei la limita cîmpului gravitațional al astrului respectiv, nava se va apropia mai mult sau mai puțin de suprafața astrului. Mișcarea navei față de astru depinde de viteza pe care o are nava cînd ajunge la perigeu; se poate calcula viteza de evadare corespunzătoare altitudinii perigeului față de suprafața astrului. Dacă viteza navei la perigeu este mai mare decît viteza de evadare, nava cosmică nu rămîne în cîmpul gravitațional al astrului. Este cazul navelor cosmice trimise spre Venus și Marte care și-au continuat apoi zborul pe o traiectorie hiperbolică. Dacă viteza navei la perigeu este mai mică

decît viteza de evadare, nava va orbita în jurul planetei așa cum este cazul stațiilor cosmice lunare, trimise să exploreze luna și care se mișcă pe orbite circumlunare.

Dacă viteza navei la perigeu este foarte mică, se poate realiza căderea pe astrul respectiv; este cazul stațiilor cosmice echipate pentru explorarea directă a unui astru.

8.7. Călătoria Pămînt — Lună — Pămînt

Călătoria la Lună și înapoi reprezintă o ilustrare a principiilor fizice ale astronauticii. Calculul datelor necesare pentru o astfel de călătorie depinde în primul rînd de scopul propus. Pentru început oamenii de știință și-au propus un studiu geologic sumar al solului lunar, cu montarea pe Lună a unor laboratoare reduse ca aparatură și aducerea pe Pămînt atît a probelor geologice cît și a unor aparate trimise anterior. Pentru efectuarea experimentărilor cît și a manevrelor de navigație spațială, echipajul a fost stabilit la minimum 3 persoane, iar masa navei care trebuie să părăsească cîmpul gravitațional al Pămîntului la 50 tone*. Nava cuprinde cîteva module (modulul de comandă, modulul de servici și modulul lunar) ale căror funcțiuni vor fi arătate în continuare. Distanța Pămînt—Lună este $3{,}8 \cdot 10^8$m.

Lansarea de la suprafața Pămîntului. Pentru evadarea din cîmpul gravitațional al Pămîntului sînt posibile două soluții. Prima soluție constă în folosirea unei rachete puternice care să imprime navei spațiale viteza de evadare de la suprafața Pămîntului, iar a doua soluție presupune realizarea unei stații interplanetare, plasată pe o orbită la o anumită altitudine, pe care sînt transportate de pe Pămînt nava și echipajul, cu mai multe rachete de putere medie. În a doua soluție, lansarea navei spațiale de pe stația interplanetară se poate face cu o rachetă mai puțin puternică decît aceea necesară în prima soluție, deoarece, după cum s-a arătat în § 8.6, viteza de evadare scade cu altitudinea; de exemplu, viteza de evadare de la altitudinea $h = 10\ R_0$ este numai 3 350 m/s, în timp ce de la $h = 0$, viteza de evadare este 11 200 m/s.

Soluția întîi impune tehnica rachetelor puternice, iar soluția a doua pe aceea a construirii stațiilor interplanetare. Programul Apollo, ca și programul „Luna", au recurs la prima soluție, realizînd rachete cu trei trepte. Caracteristicile generale ale rachetei Saturn sînt date în tabelul 8.4; racheta împreună cu nava de 50 tone are o masă totală de 2 900 tone. Propulsantul motoarelor este constituit din carburant (kerosen sau hidrogen) și din comburant, oxigenul, care oxidează carburantul; de exemplu, treapta întîi a rachetei conține la start 640 tone kerosen și 1 510 tone oxigen. Principalele caracteristici ale motoarelor rachetei sînt date în tabelul 8.5.

În rezervoare oxigenul lichid trebuie menținut la 100 kelvini, iar hidrogenul lichid la 20 kelvini, pentru a împiedica vaporizarea. Păstrarea oxigenului și hidrogenului în stare gazoasă ar necesita rezervoare cu pereți foarte groși, rezistenți la presiunile mari la care sînt supuși, ceea ce ar mări considerabil masa rachetei.

La lansare, motoarele primei trepte produc o forță $F = 35$ MN, ce imprimă întregului ansamblu rachetă + navă, o accelerație care, pe măsură ce se consumă carburantul și comburantul, devine din ce în ce mai mare.

*) Pentru o navă fără echipaj, care ar executa aceste operații automat sau la comanda de pe Pămînt, (ca de exemplu în programul „LUNA"), masa navei s-ar reduce la 20 ... 25 tone.

Tabelul 8.4

Caracteristicile treptelor rachetei Saturn VB

Treapta	Diametrul m	Înălțimea m	Masa t	Motoarele	Debitul de consum al propulsantului t/s	Timpul de combustie s	Domeniul de altitudini km	Viteza finală m/s
I	10	42	2 240	5 × F1	14	160	0...120	3 000
II	10	25	450	5 × J2	1,25	370	120...300	6 000
III	6,6	16	120	1 × J2	0,25	150 320	200...300	8 000 11 600

Tabelul 8.5

Caracteristicile motoarelor rachetei Saturn VB
(k = kerosen)

Tipul	Propulsantul	Forța kN	Masa t	Debitul de consum t/s	Temperatura în camera de combustie °C	Viteza gazelor m/s
F1	$k + O_2$	7 000	8,4	2,9	3 300	2 400
J2	$H_2 + O_2$	1 000	2	0,25	3 600	4 000

În timp ce se consumă propulsantul primei trepte, masa rachetei, scade de la $m_i = 2\,900$ t la $m_f = 700$ t. Întrucît forța F rămîne constantă în acest timp, accelerația inițială a_i și accelerația finală a_f sînt

$$a_i = \frac{F - G_i}{m_1} = 1{,}7 \text{ m/s}^2$$

$$a_f = \frac{F - G_f}{m_f} = 40 \text{ m/s}^2$$

ceea ce înseamnă o creștere foarte mare a accelerației; la sfîrșitul acționării primei trepte, accelerația rachetei este de patru ori mai mare decît accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului!

După consumarea propulsantului primei trepte, se desprind rezervoarele și motoarele acestei trepte și intră în funcțiune treapta a doua a rachetei, propulsată cu hidrogen și oxigen. După ce se termină propulsantul treptei a doua și această treaptă este abandonată în spațiu, treapta a treia imprimă navei viteza de aproape 8 000 m/s; cu această viteză are loc înscrierea pe

o orbită circulară în jurul Pămîntului. După efectuarea a două rotații pe orbita circulară terestră, motoarele treptei a treia se aprind pentru a doua oară și imprimă navei o viteză ceva mai mare decît viteza de evadare și anume la 11 600 m/s pentru motivul arătat ulterior.

În interiorul treptei a treia a rachetei, există un compartiment, cu diametrul rachetei de 6,6 m și înălțimea un metru, care conține navigatorul automat, dispozitivul de control al treptelor și instalația de prelucrare a informațiilor înregistrate în timpul funcționării motoarelor celor trei trepte. Acest creier electronic este folosit, ca și întregul sistem al rachetei purtătoare, numai pentru 17 minute de zbor propulsat!

Traiectoria Pămînt—Lună. Creșterea vitezei navei de la 8 000 m/s la 11 600 m/s se face astfel încît traiectoria pe care se înscrie nava să o ducă la Lună. Pe măsură ce nava se depărtează de Pămînt, viteza ei scade, datorită creșterii energiei potențiale. Dacă nava ar fi pornit de la Pămînt cu o viteză egală cu viteza de evadare ($V_e = 11\,200$ m/s), nava ar fi ajuns pe suprafața unde atracția Lunii este egală cu atracția Pămîntului — echigravisfera — cu o viteză aproape nulă și în consecință ar fi urmat fie căderea navei pe Lună, fie căderea ei înapoi pe Pămînt. Pornind însă cu o viteză ceva mai mare decît viteza de evadare, nava ajunge la suprafața de egală atracție cu o viteză diferită de zero și anume 1 000 m/s, care permite înscrierea navei pe traiectoria aleasă spre Lună. În cîmpul gravitațional al Lunii, viteza navei crește din nou, astfel încît la periseleniu nava ajunge cu viteza de 2 600 m/s (figura 8.10).

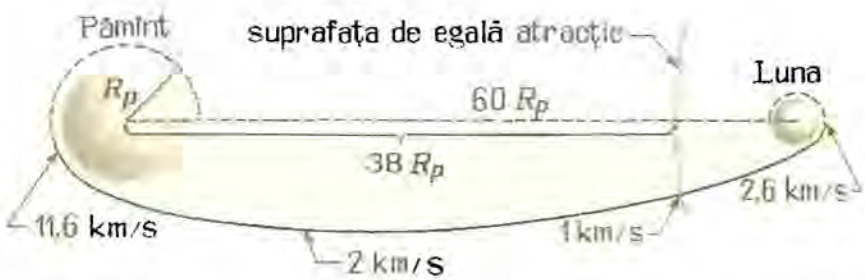


Fig. 8.10. Valorile vitezelor navei Apollo pe traiectoria balistică între Pămînt și Lună

Zborul pe traiectoria Pămînt—Lună are un caracter „balistic". Alegînd convenabil vitezele, ca mărime și orientare, traiectoria Pămînt—Lună se poate parcurge cu o durată de funcționare a motoarelor foarte redusă: 17 minute față de cca./70 ore durata parcurgerii traiectoriei Pămînt—Lună. Pe traiectorii nebalistice, ar fi posibil să se reducă durata zborului, dar cantitatea de propulsant necesară ar fi foarte mare și deci racheta ar trebuie să aibă dimensiuni și mai mari.

În timpul parcurgerii distanței Pămînt—Lună pot apare devieri de la traiectoria propusă, din cauza modificării impulsului navei, ca urmare a eliminării apei de la pilele de combustie. Această apă, precum și deșeurile lichide nu sînt „aruncate" în spațiu; prin deschiderea unei supape către exterior se produce vaporizarea lor chiar în recipientul care le conține și astfel vaporii trec în spațiul înconjurător. Acestei „evacuări" a deșeurilor îi corespunde o variație a impulsului navei. De aceea din timp în timp este necesară corectarea traiec-

toriei, care se face cu ajutorul unor motoare mici, dispuse lateral, fiecare avînd forța $F = 500$ N.

În spațiul vid, partea navei expusă radiațiilor solare se încălzește la + 120°C, în timp ce partea opusă neexpusă are o temperatură de numai −150 °C. Pentru uniformizarea temperaturii, alte motoare imprimă navei o rotație de 6 ture pe oră în jurul axei proprii.

La periseleniu nava ajunge cu viteza de 2 600 m/s, care fiind mai mare decît viteza de evadare în cazul Lunei, ar determina înscrierea navei pe o hiperbolă, pe care nava s-ar depărta de Lună și s-ar apropia din nou de Pămînt. Pentru ca nava să rămînă pe o orbită circumlunară, motorul modulului de serviciu ($F = 10^5$N) frînează nava, reducîndu-i viteza pînă la 1600 m/s, corespunzătoare vitezei pe o traiectorie circulară la altitudinea $h = 120$ km ($T = 2$ h). Pe această orbită numită orbită de așteptare are loc pregătirea aselenizării.

Aselenizarea. Pe orbita de așteptare, energia totală a navei este egală cu energia de lansare așa cum s-a arătat în § 8.5. Se calculează această energie pe care o are nava cu m = 50 t = $5 \cdot 10^4$ kg, folosind valoarea energiei de lansare pe unitatea de masa $(E + \Delta U)/m$, dată în tabelul 8.6,

$$m \cdot \frac{E + \Delta U}{m} = 5 \cdot 10^4 \text{ kg} \times 1{,}5 \cdot 10^6 \text{J/kg} = 7{,}5 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Tabelul 8.6

Energia cinetică raportată la masă $E/m = \Gamma/[2(R_0 + h)]$, energia potențială raportată la masă $U/m = \Gamma/(R_0 + h)$, variația energiei potențiale raportată la masă $\Delta U/m = (U - U_0)/m$, U_0 fiind energia potențială la $h = 0$ și energia de lansare raportată la masă $(E + \Delta U)/m$ pentru diferite altitudini în cazul Lunii

($\Gamma = \gamma M = 4{,}90 \cdot 10^{12}$ m³/s²)

h km	$R_0 + h$ km	$\frac{E}{m} = \frac{\Gamma}{2(R_0+h)}$ MJ/kg	$\frac{U}{m} = \frac{\Gamma}{R_0+h}$ MJ/kg	$\frac{\Delta U}{m}$ MJ/kg	$\frac{E+\Delta U}{m}$ MJ/kg
0	1 740	1,41	−2,83	0	1,41
15	1 755	1,40	−2,80	0,03	1,43
100	1 840	1,33	−2,66	0,17	1,50
120	1 860	1,32	−2,64	0,19	1,51
200	1 940	1,26	−2,53	0,30	1,56
0,5 R_0 = 870	2 610	0,99	−1,88	0,95	1,94
1 R_0 = 1 740	3 480	0,70	−1,40	1,43	2,13
10 R_0 = 17 400	19 140	0,13	−0,26	2,57	2,70
100 R_0 = 174 000	175 740	0,013	−0,027	2,80	2,81

Pentru aselenizarea navei ar trebui ca energia $7{,}5 \cdot 10^{10}$ J să fie „anulată" cu cantitatea de propulsant care alimentînd motoarele navei, eliberează aceeași energie. Propulsantul este caracterizat printr-o anumită putere calorifică, de exemplu, kerosenul are puterea calorifică de 10 MJ/kg = 10^7 J/kg (v. § 9.7).

Ca urmare presupunînd randamentul motoarelor egal cu 0,5, energiei de $7{,}5 \cdot 10^{10}$ J îi corespunde cantitatea de propulsant

$$\frac{7{,}5 \cdot 10^{10}\,\text{J}}{0{,}5 \times 10^{7}\,\text{J/kg}} = 15 \cdot 10^{3}\ \text{kg} = 15\ \text{t}$$

Odată ajunsă pe suprafața Lunii și misiunea terminată, nava ar trebui să se întoarcă pe orbita de așteptare. La lansare se presupune masa navei de numai 40 tone (pe de o parte s-a micșorat datorită consumului de propulsant, iar pe de altă parte s-a mărit datorită probelor geologice sau aparaturii luate de pe Lună), ceea ce înseamnă energia de lansare pentru întoarcerea pe orbita de așteptare

$$m \cdot \frac{E + \Delta U}{m} = 4 \cdot 10^{4}\ \text{kg} \times 1{,}5 \cdot 10^{6}\,\text{J/kg} = 6 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Acestei energii îi corespunde, pentru motoarele cu randamentul egal cu 0,5, cantitatea de propulsant

$$\frac{6 \cdot 10^{10}\ \text{J}}{0{,}5 \times 10^{7}\ \text{J/kg}} = 12 \cdot 10^{3}\ \text{kg} = 12\ \text{t}$$

Prin urmare, pentru aselenizare și pentru întoarcerea pe orbita de așteptare nava ar avea nevoie de cantitatea de propulsant de 15 t + 12 t la care se adaugă o rezervă de 50% (13 tone), ceea ce face în total 40 tone.

Întrucît propulsantul necesar reprezintă o cantitate mult prea mare, pentru a putea fi transportată de navă, s-a recurs la soluția construirii navei din module; aselenizarea este executată numai de modulul lunar, iar modulul de comandă și modulul de servici rămîn cuplate în mișcare pe orbita de așteptare*. Pentru a reduce și mai mult cantitatea de propulsant necesară, modulul

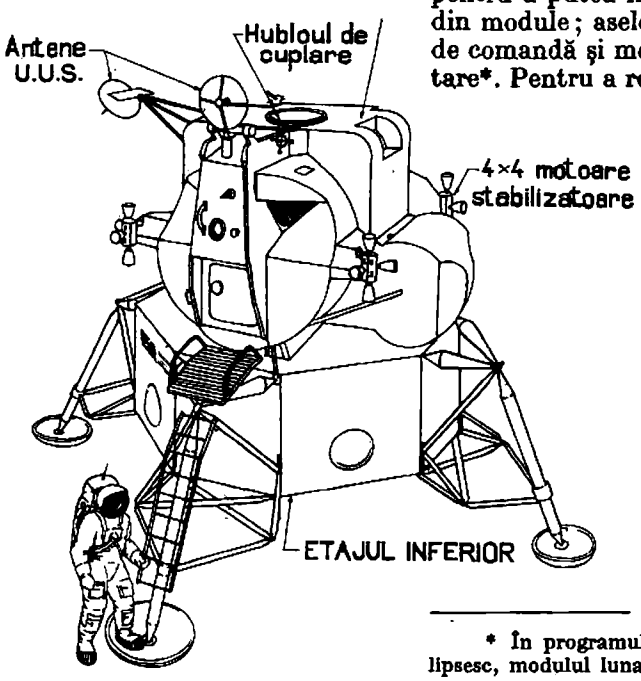


Fig. 8.11. Structura modulului lunar Apollo, format din două etaje, etajul inferior pentru aselenizare și etajul superior pentru întoarcerea pe orbita de așteptare

* În programul LUNA, unde nu există echipaj, modulul de comandă și cel de serviciu lipsesc, modulul lunar fiind comandat automat sau de pe Pămînt.

lunar a fost conceput din două etaje (fig. 8.11). Etajul inferior echipat cu un motor cu forţa variabilă, F = 6...48 kN, are un dublu rol; la aselenizare serveşte pentru frînarea navei, iar apoi este folosit ca rampă de lansare de pe Lună a etajului superior. Motorul de frînare cu forţă variabilă este comandat automat de un calculator şi un radar pînă la distanţa de 150 m de solul lunar, de unde comanda aselenizării se face manual. Etajul superior, echipat cu un motor cu F = 16 kN este necesar lansării de pe suprafaţa Lunii; el conţine cabina echipajului şi sistemul de navigaţie.

Masa modulului lunar este m = 15 tone, ceea ce înseamnă că pe orbita de aşteptare, înaintea aselenizării, energia sa este

$$m \cdot \frac{E + \Delta U}{m} = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ kg} \times 1{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 2{,}25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

iar cantitatea de propulsant necesar aselenizării, corespunzătoare acestei energii, pentru motoarele cu randamentul egal cu 0,5 este

$$\frac{2{,}25 \cdot 10^{10} \text{ J}}{0{,}5 \times 10^7 \text{ J/kg}} = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg} = 4{,}5 \text{ t}$$

După executarea programului pe Lună, numai etajul superior al modulului lunar se mai întoarce pe orbita de aşteptare; masa acestuia este m = 6 tone. Energia de lansare pentru a ajunge pe orbita de aşteptare este

$$m \cdot \frac{E + \Delta U}{m} = 6 \cdot 10^3 \text{ kg} \times 1{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

şi deci cantitatea de propulsant

$$\frac{9 \cdot 10^9 \text{ J}}{0{,}5 \times 10^7 \text{ J/kg}} = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg} = 1{,}8 \text{ t}$$

Prin urmare, soluţia cu modulul lunar format din două etaje necesită 4,5t + + 1,8 t la care se adaugă rezerva de 50% (3,1 tone), adică în total 9,4 tone; această cantitate de propulsant este de *patru ori mai mică* decît cantitatea de 40 tone, calculată anterior pentru executarea aceloraşi manevre cu întreaga navă.

Trebuie subliniat că soluţia cu modulul lunar impune o mare precizie atît pentru calculul traiectoriei navei pe orbita de aşteptare cît şi în calculul traiectoriei etajului superior după lansarea de pe Lună, pentru a se putea realiza în condiţii optime cuplarea lui cu modulul de comandă, pe orbita de aşteptare din jurul Lunii.

Întoarcerea pe Pămînt. După executarea operaţiei de cuplare şi după trecerea echipajului în modulul de comandă se abandonează etajul superior al modulului lunar. Pe orbita de aşteptare nava îşi accelerează mişcarea pînă ce atinge viteza de evadare din cîmpul gravitaţional al Lunii. Din punctul de injecţie al orbitei circumlunare, nava se înscrie pe traiectoria care o aduce spre Pămînt. După străbaterea echigravisferei, viteza navei creşte din ce în ce mai mult, avînd aceleaşi valori ca acelea date în figura 8.10; aproape de Pămînt viteza navei ajunge la 11 600 m/s.

Înainte ca nava să pătrundă în păturile superioare ale atmosferei aflate la circa 200 km de suprafața Pămîntului, se abandonează în spațiu și modulul de serviciu, reducînd astfel la minimum masa navei. În atmosfera terestră va pătrunde numai modulul de comandă a cărui masă este $m = 5{,}5$ t $=$ $= 5\,500$ kg.

Modulul de comandă cu $m = 5\,500$ kg și cu viteza $v = 11\,600$ m/s are, la intrarea în atmosferă Pămîntului, energia

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 5\,500 \times 11\,600^2 \cong 4 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

De această dată nu se folosește, pentru calculul energiei, valorile din tabelul 8.2, deoarece acest tabel se referă la energiile pentru orbita circulară, or, nava, la intrarea în atmosferă, se mișcă pe o traiectorie balistică între Lună și Pămînt.

Dacă pentru revenirea pe Pămînt s-ar adopta soluția frînării cu motoare, atunci cantitatea de propulsant necesară ar fi

$$\frac{4 \cdot 10^{11} \text{ J}}{0{,}5 \times 10^7 \text{ J/kg}} = 8 \cdot 10^4 \text{ kg} = 80 \text{ t (!)}$$

Acest propulsant ar fi trebuit purtat în spațiu, de la lansarea navei de pe Pămînt, ceea ce ar fi impus dimensiuni mult mai mari ale rachetei de lansare. O altă soluție posibilă ar fi alimentarea navei cu propulsantul pentru frînare de pe un satelit artificial al Pămîntului; această soluție ar cere navei o altă manevră: întîlnirea cu „satelitul-cisternă".

Pentru frînarea modulului de comandă în atmosferă, programul Apollo a recurs la o manevră specială fără motoare. În prima parte a manevrei, modulul de comandă execută o rotire de 180°, intrînd în atmosferă cu partea convexă prevăzută cu un „scut termic". Manevra specială de frînare este complet automatizată; un sistem complex de giroscoape și accelerometre dirijează patru motoare mici ($F = 450$ N) ale modulului de comandă, cu ajutorul cărora nava execută ricoșeuri pe păturile atmosferice.

În timpul manevrei de frînare, care durează în programul Apollo $t = 180$ s, nava cade pînă la o altitudine de 7 000 m, iar viteza se reduce de la $v_i =$ $= 11\,600$ m/s la $v_f = 100$ m/s, ceea ce înseamnă o valoare a decelerației medii $\bar{a}$

$$\bar{a} = \frac{v_i - v_f}{t} = \frac{11\,600 - 100}{180} = \frac{11\,500}{180} = 64 \text{ m/s}^2$$

mai mare de 6,5 ori decît accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului.

Prin frecarea cu aerul, energia navei se transformă în energie termică care ridică temperatura scutului termic pînă aproape de 3 000°C; stratul de epoxi al scutului termic, adus la incandescență, se consumă. Intrarea în atmosferă reprezintă o dificultate mare și rămîne una din cele mai importante probleme ale zborurilor cosmice.

8.8. Concluzie

Deşi soluţia actuală adoptată pentru călătoria Pămînt—Lună—Pămînt se bazează pe un consum minim de propulsant, totuşi are marele dezavantaj că aproape tot sistemul de transport se abandonează în spaţiu în diferitele etape ale zborului. La programul Apollo, de exemplu, se recuperează numai modulul de comandă de 5,5 *t*, din cele aproape 3 000 *t* de la lansare; se pierd motoarele de propulsie cu toate instalaţiile auxiliare, precum şi modulele navei*. Pentru înlăturarea dezavantajelor soluţiei actuale, se depun eforturi foarte mari pentru proiectarea şi construirea unor „navete" care să alimenteze staţii planetare, care ar urma să fie amplasate în prealabil pe o orbită de altitudine $h = 500$ km. De pe o asemenea staţie, o navă cosmică ar putea pleca şi s-ar putea întoarce folosind cantităţi mai mici de propulsant nemaifiind necesară deplasarea navei prin atmosfera Pămîntului. În construcţia navetelor care ar străbate atmosfera Pămîntului, trebuie să se combine propulsarea prin ejectarea gazelor cu efectul aerodinamic, astfel încît întregul ansamblu să poată fi folosit de mai multe ori. Pentru aceste navete se preferă decolării verticale, o decolare orizontală mai avantajoasă, deoarece în acest caz forţa imprimată nu trebuie să depăşească greutatea navei. Se crede că acestă soluţie ar putea fi folosită în a doua jumătate a deceniului 1971...1980 şi va scădea costul pe kilogram al transportului spaţial de zece ori!

Soluţia folosită actualmente pentru zborurile spaţiale a permis investigarea spaţiului înconjurător Pămîntului şi a satelitului său, Luna. În primii zece ani de zboruri spaţiale, 1958...1968, au fost trimise în spaţiul cosmic 3 637 aparate şi diverse staţii (în medie una pe zi!) dintre care, la sfîrşitul anului 1968 mai erau în spaţiu 1 400, restul au fost fie readuse pe Pămînt, fie s-au distrus la impactul cu atmosfera.

Obiectivul urmărit prin investigarea suprafeţei lunare este cunoaşterea geologică a satelitului Pămîntului. Din acest punct de vedere, probele şi informaţiile culese ar putea permite, ca în viitor, să se înceapă pe solul lunar chiar operaţii de prelucrare a rocilor lunare; în plus, aceste investigaţii vor permite o mai bună înţelegere a originii Pămîntului şi a sistemului solar. Din unele roci lunare aduse pe Pămînt s-a obţinut, în laborator, apă prin procedee chimice. Faptul că se poate produce apă pe Lună, ar putea uşura activitatea unor eventuale staţii lunare pentru exploatări geologice. În plus, apa poate fi disociată în elementele ei componente; astfel, oxigenul produs ar putea fi folosit în aparatele pentru respiraţie, sau chiar, s-ar putea crea o atmosferă artificială, iar hidrogenul poate fi folosit ca propulsant pentru lansarea navelor cosmice către Pămînt sau către alte planete.

După Lună, obiectul cercetărilor spaţiale va fi planeta Marte. Deşi planeta Venus se mişcă în jurul Soarelui pe o orbită care o menţine la o apropiere de Pămînt mai mare decît aceea a planetei Marte, totuşi planeta Venus este considerată a fi mult mai puţin accesibilă pentru exploatări, deoarece atmosfera acestei planete este groasă şi opacă. În plus, temperaturile extrem de ridicate ale suprafeţei planetei, exclud posibilitatea de a fi cercetată de

---

* La programul LUNA se recuperează conteinerul cu probe lunare, cu masa de aproximativ 0,1 t din cele aproape 3 000 t la lansare.

oameni într-un viitor apropiat; pe de altă parte, aceste condiții vor limita posibilitățile de observare a planetei din nave prevăzute cu instrumente.

Planeta Marte are o atmosferă foarte subțire și transparentă. Pe această planetă oxigenul lipsește și probabil că apa este numai legată în constituția rocilor. Fotografiile luate de navele automate, la sfîrșitul deceniului trecut au dezvăluit o suprafață foarte asemănătoare cu aceea a Lunii, adică plină de cratere. Speculațiile cu privire la posibilitatea ca pe Marte să existe viață rămîn justificate, deși deocamdată nu există dovezi concludente. Pînă la coborîrea oamenilor pe Marte, probabil că problema vieții pe această planetă va rămîne fără răspuns. Este probabil că mediul de pe Marte să nu fie cu nimic mai ostil, ba poate chiar mult mai ospitalier, decît cel de pe Lună!

Problema trimiterii oamenilor pe Marte este dificilă nu atît din motive legate de mediu, cît din cauza distanței foarte mari. Chiar și în momentele conjuncției celei mai apropiate, care are loc o dată la doi ani, distanța între Pămînt și Marte rămîne totuși $56 \cdot 10^6$ km, adică aproximativ 150 de ori distanța medie Pămînt—Lună. O călătorie dus și întors către planeta Marte ar trebui să poarte oamenii de-a lungul a milioane de kilometri în spațiu și ar necesita, probabil, aproximativ 2 ani! Cu posibilitățile tehnice actuale este greu de conceput o navă spațială care ar putea transporta hrană și oxigen pentru întreținerea unui echipaj, chiar foarte mic, pe o durată atît de mare. Oamenii de știință caută un sistem de autoîntreținere a vieții pe navă, prin recuperarea deșeurilor pentru reconstituirea permanentă a atmosferei și pentru producerea alimentelor la bordul navei.

Pentru deceniul actual sînt prevăzute experimentarea și intrarea în funcțiune a stațiilor plasate pe orbite circumterestre cu echipaj de 3...12 oameni. Este sigur că aceste stații vor furniza multe informații care vor sta la baza proiectării și realizării călătoriei la Marte și în viitor la alte planete. Una din cerințele majore ale unei călătorii mai îndepărtate, cum ar fi o călătorie la planeta Marte, dus și întors, rămîne fără îndoială problema motoarelor de putere mare și cu durată de funcționare îndelungată. Cercetările care se fac încă de mulți ani asupra *rachetelor atomice* lasă să se întrevadă posibilitatea folosirii lor în viitor. O navă echipată cu motoare proprii puternice va putea să-și modifice traiectoria ori de cîte ori este necesar; de asemenea se va putea obține viteza de evadare corespunzătoare oricărui astru pe lîngă care ar trece și pe care nu ar vrea să se oprească.

Capitolul 9

Energia

9.1. Energia cinetică şi energia potenţială

Aşa cum s-a arătat în §§ 6.3 şi 6.6 *lucrul forţei rezultante* este egal cu variaţia energiei cinetice a corpului asupra căruia acţionează forţa rezultantă, în absenţa deformărilor. Dacă un corp are energie cinetică el poate efectua un lucru asupra altui corp, de exemplu, prin ciocnire cu el. Se presupune un corp A care ciocneşte un alt corp B aflat în stare de repaus. Corpul A va exercita o forţă asupra lui B şi, ca urmare, corpul B va primi energie cinetică. Conform teoremei acţiunii şi reacţiunii, corpul B va exercita asupra lui A o forţă egală şi de sens opus al cărui efect va fi scăderea energiei cinetice a corpului A. Dacă asupra celor două corpuri nu mai acţionează şi alte forţe, atunci energia cinetică cîştigată de corpul B va fi egală cu energia cinetică pierdută de corpul A.

Din consideraţiile făcute mai sus rezultă că lucrul efectuat de corpurile A şi B poate fi determinat în funcţie de energiile lor cinetice. Astfel, energia cinetică poate fi transmisă de la corpul A la corpul B, dacă corpul A efectuează lucru asupra corpului B, de exemplu, ciocnindu-se cu el. Deci *energia cinetică pe care un corp o are* reprezintă *lucrul maxim pe care acel corp îl poate efectua* în virtutea faptului că are o viteză şi deci un impuls. Din acest punct de vedere *lucrul şi energia sînt mărimi interschimbabile.* Dacă un corp execută un lucru asupra unui alt corp, energia cinetică a primului corp scade, în timp ce energia cinetică a celui de-al doilea corp creşte cu o cantitate de energie egală cu cantitatea de energie cinetică pierdută de primul corp.

La începutul acestui paragraf s-a arătat că variaţia energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul forţei rezultante care acţionează asupra acelui corp. Forţa rezultantă este compusă din forţe de cîmp şi forţe imprimate. Deosebirea dintre cele două tipuri de forţe este că forţele de cîmp sînt forţe conservative pe cînd forţele imprimate nu sînt forţe conservative. Lucrul unei forţe conservative nu depinde de drumul parcurs între două puncte, ci depinde numai de poziţia iniţială şi de poziţia finală a corpului. În capi-

tolul anterior, s-a definit pe baza acestei proprietăți, *energia potențială* a unui corp care se află în cîmpul gravitațional. Lucrul efectuat de forța gravitațională asupra unui corp care cade dintr-un punct în care energia sa potențială este U_i, pînă în punctul în care aceasta are valoarea U_f, este dat de relația

$$L = U_f - U_i \tag{9.1}$$

stabilită în § 8.4.

Dacă deplasarea corpului se face în sens opus forței de cîmp, atunci este necesară aplicarea unei forțe imprimate. Lucrul forței de cîmp produce variația energiei cinetice a corpului și anume corpul în cădere capătă energie cinetică; cu alte cuvinte, scăderea energiei potențiale a unui corp conduce la creșterea energiei sale cinetice. Lucrul forței imprimate produce creșterea energiei potențiale, în sensul că energia cinetică se transformă în energie potențială.

Deci energia potențială apare în cazul unei forțe de cîmp — forță conservativă — și este funcție de poziția corpului în cîmpul respectiv. Un alt exemplu de forță conservativă este *forța elastică* care apare într-un resort. De exemplu, un corp prins de un resort, pe un plan orizontal, va fi atras spre poziția normală cu atît mai mult cu cît resortul este mai întins. Forța elastică fiind o forță conservativă execută un lucru, care depinde de poziția inițială și de poziția finală a corpului. Deci în cazul resortului apare o energie potențială, pe baza căreia forța elastică poate produce un lucru și deci mișcare.

Dacă F este forța elastică, iar corpul execută o deplasare pe axa Ox, energia potențială elastică U se scrie cu ajutorul integralei, deoarece forța F depinde de distanța x la poziția normală,

$$U = -\int F(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{9.2}$$

Semnul minus se explică prin faptul că relația între lucrul L și variația energiei potențiale este $L = -\Delta U$, așa cum exprimă relația (8.10) din § 8.4.

În concluzie, un corp poate avea energie potențială numai dacă asupra lui acționează o forță conservativă. Lucrul executat de o forță conservativă, de exemplu forța gravitațională sau forța elastică, conduce la variația energiei potențiale și anume la scăderea energiei potențiale. Lucrul executat de o forță imprimată care se opune unei forțe conservative conduce la creșterea energiei potențiale în cîmpul respectiv. Transformarea energiei potențiale în energie cinetică și invers va fi examinată în unul din paragrafele care urmează.

9.2. **Energia de legătură**

Particulele componente ale unei molecule, ale unui atom sau ale unui nucleu se unesc datorită unor *forțe de atracție* care, în cazul moleculei, sînt forțe moleculare, în cazul atomului, forțe electrice, iar în cazul nucleului, forțe nucleare. Forțele de atracție între două particule componente ale unei anumite configurații sînt forțe de cîmp și ca atare, pentru o anumită poziție a particulelor componente, configurația se caracterizează printr-o anumită energie potențială. În momentul formării configurației (moleculă, atom sau nucleu) particulele ei componente ocupă o poziție de *echilibru stabil*, carac-

terizată printr-o *energie potențială minimă.* Se consideră că înainte de formarea configurației, particulele sînt suficient de distanțate astfel încît *energia lor potențială este maximă.* Prin urmare la formarea configurației din particulele componente respective se eliberează o energie egală cu diferența dintre energia potențială maximă, corespunzătoare poziției particulelor dinainte de formarea configurației, și energia potențială minimă, corespunzătoare poziției de echilibru stabil. Energia eliberată la formarea unei configurații a substanței (moleculă, atom sau nucleu) se numește *energie de legătură* și va fi notată cu Φ. Cu cît energia de legătură este *mai mare* înseamnă că forțele între particulele componente sînt *mai puternice* și ca urmare configurația respectivă este *mai stabilă.* Pentru a desface în particulele componente o asemenea configurație stabilă (de exemplu: disocierea moleculei, ionizarea atomului sau fragmentarea nucleului) trebuie să se cheltuiască o cantitate de energie din exterior; această energie este necesară pentru a separa particulele componente la distanțe suficient de mari una de alta, distanțe la care forțele de atracție sînt atît de slabe încît nu mai pot acționa asupra particulelor componente. Energia care trebuie cheltuită pentru desfacerea unei configurații în particulele sale componente este egală tocmai cu energia de legătură.

În chimie, spre deosebire de fizica atomică și nucleară, energia de legătură, adică energia care intervine la formarea unei molecule printr-o reacție chimică se numește *energie de reacție* sau *energie de formare.* În general, la formarea moleculelor se eliberează energie, prin urmare energia de reacție are rolul energiei de legătură. Dar spre deosebire de celelalte capitole ale fizicii, fizica moleculară cunoaște cazuri în care la formarea unei molecule nu se eliberează energie, ci din contră se absoarbe energie la constituirea configurației respective.

În chimie, reacțiile chimice în care se eliberează energie la formarea moleculei se numesc *reacții exoterme* și combinațiile chimice respective se numesc *combinații exoterme*, iar reacțiile chimice în care se absoarbe energie la formarea moleculei se numesc *reacții endoterme* și combinațiile chimice respective se numesc *combinații endoterme.* Combinațiile exoterme sînt stabile deoarece eliberează energia de legătură la formarea lor, starea energetică finală fiind mai mică decît starea energetică inițială; combinațiile endoterme nu sînt stabile, deoarece prin formare ajung într-o stare energetică superioară. Combinațiile endoterme, de exemplu, explozivii, sub acțiunea unei ușoare excitații exterioare pot pune în libertate energia absorbită la formarea lor. Ca urmare, disocierea combinațiilor endoterme se face numai cu degajare de energie. Concluzia acestor considerații este că la formarea moleculelor se întîlnesc cazuri în care se eliberează energie — combinațiile exoterme — și cazuri în care se absoarbe energie — combinațiile endoterme — pe cînd la formarea atomilor și a nucleelor totdeauna se eliberează energie. În cele ce urmează se va compara energia de legătură a diferitelor configurații ale substanței: molecule, atomi, nuclee. Pentru această comparație se va face apel numai la moleculele combinațiilor exoterme.

Ca exemplu, se descrie din punct de vedere energetic, formarea moleculelor de bioxid de carbon, de apă, a atomului de hidrogen și a nucleului de deuteriu.

Molecula de bioxid de carbon, CO_2, se formează prin arderea carbonului și de aceea energia de legătură în acest caz se mai numește *energia de ardere* sau *căldura de ardere.* Deoarece energia eliberată depinde de cantitatea de

substanță care intră în reacție, adică de numărul de molecule din acea cantitate de substanță, este mai comod să se folosească energia de legătură pentru un kilomol. În cazul arderii carbonului această energie se determină experimental cu bomba calorimetrică și se obține $\Phi = 395$ MJ/kmol. Reacția chimică de formare a CO_2 gazos (g) din carbon solid (s) și oxigen gazos (g) se scrie

$$C(s) + O_2(g) = CO_2(g); \quad \Phi = 395 \frac{MJ}{kmol}$$

Semnificația acestei reacții este următoarea: 12 kg carbon solid (grafit, nu cărbune!) reacționează cu 32 kg oxigen gazos și se produc 44 kg bioxid de carbon gazos, punîndu-se în libertate energia de legătură (de ardere) de 395 megajouli pentru un kilomol (căci 44 kg CO_2 reprezintă un kilomol).

Molecula de apă (l = lichid) rezultă din arderea hidrogenului

$$H_2(g) + \frac{1}{2} O_2(g) = H_2O(l); \quad \Phi = 284 \frac{MJ}{kmol}$$

adică la formarea a 18 kg de apă apar 284 megajouli, energie măsurată de asemenea cu bomba calorimetrică. Se remarcă faptul că această energie este foarte mare; ea este echivalentă cu energia care se consumă pentru a aduce o jumătate de tonă de apă de la 0°C la fierbere.

Întrucît un kilomol are $6 \cdot 10^{26}$ molecule, rezultă că energia de legătură a unei molecule de CO_2 este

$$\frac{395 \cdot 10^6 \text{ J}}{6 \cdot 10^{26}} = 6{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4{,}1 \text{ eV}$$

Această valoare a energiei de legătură exprimată în electronvolți se va folosi în continuare pentru a compara legăturile moleculare cu cele atomice și nucleare.

Referitor la atomul de hidrogen, se știe că el este format dintr-un electron care orbitează în jurul unui proton. Legătura între cele două particule este făcută de către forța coulombiană. Energia de legătură a electronului în atomul de hidrogen se măsoară indirect și anume se măsoară energia necesară pentru a scoate electronul din atomul de hidrogen, adică energia necesară pentru ionizarea atomului de hidrogen. Energia de ionizare a atomului de hidrogen, egală cu energia de legătură a electronului în atomul de hidrogen, are valoarea 13,6 eV $\cong$ 14 eV. Energiile de legătură ale electronilor în alți atomi sînt și mai mari, de exemplu, la plumb, unul din elementele mai masive, electronului celui mai legat din atom îi corespunde energia de legătură de 88 000 eV.

În nucleu energiile de legătură sînt încă și mai mari. În cea mai simplă formă de nucleu compus, nucleul de deuteriu, particulele componente ale nucleului, protonul și neutronul, au energia de legătură 2,2 MeV, energie mult mai mare decît energiile de legătură ale configurațiilor întîlnite pînă acum: molecula și atomul. Bineînțeles că nucleele cu un număr mai mare de

particule componente au energii de legătură și mai mari. Pentru cele ce vor urma mai tîrziu vom reține:

Configurația substanței	Energia de legătură
Molecula de CO_2	4,1 eV
Atomul de hidrogen	14 eV
Nucleul de deuteriu	$2{,}2 \cdot 10^6$ eV

Observînd ordinul de mărime al energiei de legătură pentru moleculă, atom și nucleu, se conchide că nucleul are o stabilitate mai mare decît atomul și acesta o stabilitate mai mare decît molecula. În adevăr, sub acțiunea temperaturii, pe măsură ce temperatura crește, are loc disocierea moleculelor și apoi ionizarea atomilor, nucleele prezentînd o stabilitate foarte mare; chiar la temperaturile mari din stele nucleele își păstrează configurația lor.

Energia de legătură pusă în libertate la formarea celor mai multe substanțe este folosită în tehnică pentru a acoperi nevoile sale energetice. În acest sens, în energetică sînt căutate substanțele caracterizate printr-o energie de legătură cît mai mare și, bineînțeles, accesibile din punct de vedere economic (vezi § 9.7).

9.3. Transformarea energiei în cîmpul gravitațional

Transformarea energiei potențiale în energie cinetică sau invers apare în multe dintre fenomenele care au loc în natură. Pentru a înțelege această transformare se consideră un experiment simplu: căderea unei bile din oțel pe o suprafață orizontală din oțel; frecarea, în cazul de față, se poate neglija. Se notează cu A poziția bilei înainte de cădere, iar cu B poziția bilei în momentul ciocnirii suprafeței (fig. 9.1). Forța gravitațională care acționează asupra bilei produce un lucru al cărui efect este creșterea energiei cinetice a bilei

$$L_{AB} = E_B - E_A \tag{9.3}$$

energia cinetică a bilei în poziția B fiind mai mare decît aceea din poziția A. La ciocnirea bilei de suprafața orizontală, apare o forță care acționează asupra bilei și care imprimă acesteia o mișcare de sens contrar; se constată experimental că bila se ridică, practic, pînă la poziția A. Mișcarea bilei se poate studia fără a face apel la forțe, folosind doar considerațiile energetice. Lucrul forței care apare în urma ciocnirii la ridicarea bilei din B în A, L_{BA} este egal cu creșterea energiei potențiale în dauna energiei cinetice, și deoarece $U_A > U_B$, se poate scrie

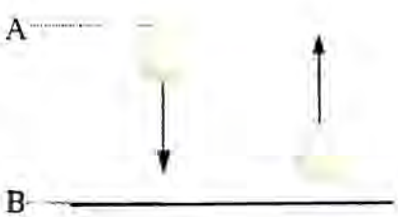


Fig. 9.1. În cîmpul gravitațional la cădere energia potențială se transformă în energie cinetică, iar la ridicare energia cinetică se transformă în energie potențială

$$L_{BA} = U_A - U_B \tag{9.4}$$

Deoarece bila se deplasează pe aceeași distanță atît la cădere cît și la ridicare rezultă că $L_{AB} = L_{BA}$. Înlocuind în această egalitate lucrurile L_{AB} și L_{BA} date de relațiile (9.3) și (9.4) se obține

$$E_B - E_A = U_A - U_B$$

$$E_A + U_A = E_B + U_B \tag{9.5}$$

adică, în cîmpul gravitațional, dacă se neglijează frecarea, suma energiilor cinetică și potențială, numită energie totală W, este o mărime constantă pentru fiecare poziție i

$$W_i = E_i + U_i = \text{constant}.$$

Bila împreună cu suportul de care se ciocnește, ambele situate în cîmpul gravitațional, formează un sistem; un astfel de sistem în care energia totală rămîne constantă, adică „se conservă", se numește *sistem conservativ* și este totdeauna legat de un cîmp de forțe conservative. În afara cîmpului gravitațional pot exista sisteme conservative și în cîmpul electric. În sistemele conservative nu există forțe de frecare, deoarece, așa cum s-a arătat în § 6.7, forța de frecare nu este o forță conservativă.

În continuare, sînt prezentate alte cîteva exemple care pun în evidență conservarea energiei în cîmpul gravitațional. Pentru un pendul care este scos din poziția de echilibru și lăsat apoi să se miște liber, energia potențială este maximă în pozițiile laterale extreme și nulă în poziția de echilibru (admițînd ca origină a energiei potențiale valoarea respectivă), în timp ce energia cinetică este maximă în poziția de echilibru și nulă în pozițiile laterale extreme. Astfel în orice poziție pe care o poate avea pendulul în mișcarea sa, suma între energia cinetică și energia potențială este constantă. Energia totală a pendulului s-ar conserva un timp nedefinit, adică pendulul ar constitui un sistem conservativ un timp nedefinit, dacă nu ar exista frecarea cu aerul a corpului care oscilează sau frecarea firului de suspensie în punctul de sprijin.

Se poate da un exemplu de sistem conservativ care durează practic un timp nedefinit, adică un sistem în care forța de frecare este practic nulă. Un asemenea sistem este format dintr-o planetă care se mișcă pe o orbită în jurul Soarelui. În acest caz energia totală a sistemului Soare-planetă rămîne constantă un timp nedefinit. Dacă mișcarea planetei se face pe o elipsă, astfel încît distanța dintre Soare și planetă variază în timpul mișcării, transformarea energiei potențiale în energie cinetică și invers se produce în timpul mișcării astfel

	energia potențială	**energia cinetică**
la afeliu	maximă	minimă
la periheliu	minimă	maximă

Lucrurile se întîmplă la fel pentru o cometă care are ca traiectorie o elipsă foarte turtită. La o depărtare foarte mare de Soare, energia sa potențială este foarte mare, iar energia cinetică foarte mică dar apropiindu-se de Soare, energia cinetică crește foarte mult pe cînd energia potențială scade foarte mult.

9.4. Echivalența masă-energie

Energia cinetică a unui corp se calculează pe baza relației (6.14), care pentru un corp nesupus la legături devine

$$E \equiv \int_0^s \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^s F \cdot \mathrm{d}s$$

Exprimînd forța ca derivata impulsului și făcînd schimbarea de variabilă se obține

$$E = \int_0^s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s = \int_0^p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}p$$

Dacă se explicitează impulsul, $p = mv$, apare sub integrală numai masa și viteza

$$E = \int_0^{mv} v \, \mathrm{d}(mv)$$

și ținînd seama de variația masei cu viteza cu care corpul se mișcă într-un anumit sistem inerțial, în mișcare față de un sistem fix (§ 5.7),

$$E = \int_0^v v \, \mathrm{d}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = m_0 \int_0^v v \, \mathrm{d}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Apelînd la integrarea prin părți

$$x \, \mathrm{d}y = xy - \int y \, \mathrm{d}x$$

$$x = v; \quad y = v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

se obține

$$E = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \int_0^v \frac{v \, \mathrm{d}v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Deoarece $\mathrm{d}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2\frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}v$, se poate scrie

$$E = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \int_0^v \frac{\mathrm{d}(1 - v^2/c^2)}{2\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \left| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right|_0^v =$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] - m_0 c^2 =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E = (m - m_0)c^2 \tag{9.6}$$

Cu alte cuvinte, într-un anumit sistem de referință inerțial, energia cinetică a unui corp este egală cu creșterea masei sale $(m - m_0)$, datorită mișcării corpului față de acel sistem de referință, înmulțită cu pătratul vitezei luminii.

Dacă se rescrie relația (9.6) sub forma

$$mc^2 = E + m_0 c^2$$

mărimea mc^2 se poate interpreta ca *energia totală* a corpului cînd este în mişcare relativă faţă de un observator dintr-un alt sistem şi care determină pentru masa corpului valoarea m, în timp ce m_0c^2 reprezintă energia corpului cînd acesta se găseşte în repaus faţă de observatorul respectiv, energie care se numeşte *energie de repaus*. De obicei se notează energia totală cu W încît

$$W = mc^2 \tag{9.7}$$

şi deci relaţia (9.6) se scrie

$$W = E + m_0c^2$$

ceea ce se exprimă astfel: energia totală a unui corp este egală cu suma între energia sa cinetică şi energia sa de repaus.

Dacă viteza v este mică faţă de c, expresia energiei cinetice a corpului care se mişcă într-un sistem inerţial se poate scrie sub forma cunoscută din fizica de liceu. Relaţia (9.6) se scrie astfel

$$E = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

Din algebră se ştie că formula binomului, formula lui Bernoulli, are expresia

$$(1 + x)^n = 1 + nx$$

dacă $x \ll 1$; în cazul de faţă

$$x = -\frac{v^2}{c^2} \quad \text{şi} \quad n = -\frac{1}{2}$$

Astfel, cu aceste transformări şi pentru $v/c \ll 1$, expresia energiei cinetice E devine

$$E = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}m_0v^2$$

Expresia (9.6) arată că energia cinetică pe care un corp o are la un moment dat este proporţională cu creşterea masei sale, faţă de sistemul inerţial în care corpul se deplasează cu viteza v. Cu cît mai mare este energia cinetică a corpului cu atît mai mult a crescut masa acelui corp. Dacă energia cinetică a corpului scade atunci şi masa sa se reduce. Einstein a generalizat acest rezultat pentru orice formă de energie: cînd un corp primeşte (absoarbe) energie masa sa creşte ($m - m_0 = \Delta m > 0$), iar cînd un corp pierde (eliberează) energie masa sa scade ($m - m_0 = \Delta m < 0$). Această legătură între masă şi energie se cunoaşte sub numele de *echivalenţa masă-energie*; ea a fost schematizată în figura 9.2. Faptele experimentale au confirmat întrutotul echivalenţa masă-energie, pentru diferite forme de energie: energie cinetică, energie potenţială, energie de legătură etc. Echivalenţa masă-energie se scrie cantitativ sub forma relaţiei (9.6) unde trebuie să apară $\Delta m \equiv m - m_0$.

$$\text{Energia} = (m - m_0)c^2 = \Delta m\, c^2$$

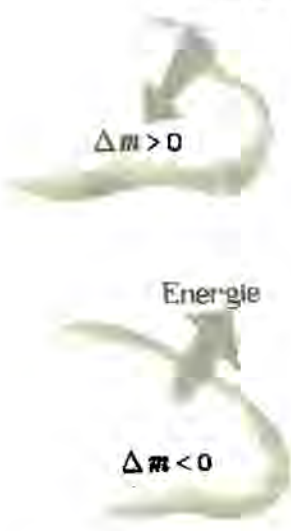


Fig. 9.2. Absorbţia energiei de către un corp este echivalentă cu creşterea masei corpului, iar eliberarea de energie cu scăderea masei respective.

sau

$$\Delta m = \frac{\text{Energia}}{c^2} \tag{9.8}$$

În această relație „Energia" poate fi, așa cum s-a mai spus, cinetică, potențială, de legătură etc. Cîteva exemple vor ilustra mai bine echivalența masă-energie.

În cazul în care energia primită de un corp este energie potențială, se presupune un electron a cărui masă în repaus este m_0 și care este ridicat în cîmpul gravitațional g la înălțimea h. La această înălțime electronul va avea energia potențială m_0gh, care adunată cu energia sa de repaus m_0c^2, conduce la energia totală $m_0gh + m_0c^2$. Dar energia totală este dată de relația (9.7) și deci

$$W = m_0gh + m_0c^2$$

$$mc^2 = m_0gh + m_0c^2 = m_0(gh + c^2)$$

Creșterea Δm a masei electronului va fi

$$\Delta m = m - m_0 = m_0 \frac{gh + c^2}{c^2} - m_0$$

$$\Delta m = \frac{m_0gh}{c^2} \tag{9.9}$$

S-a obținut un rezultat analog cu acela cuprins în relația (9.8): creșterea masei electronului este egală cu raportul dintre energia potențială și pătratul vitezei luminii. Cînd electronul este ridicat în cîmpul gravitațional la înălțimea $h = 100$ km, variația relativă a masei electronului $\Delta m/m_0 = gh/c^2$ este 10^{-11}, o cantitate mult prea mică pentru a putea fi măsurată experimental. Totuși în ultimii ani s-a putut măsura efectul cîmpului gravitațional asupra masei unui corp și anume s-a măsurat variația masei de mișcare a fotonilor care cad în cîmpul gravitațional; această problemă va fi tratată în § 17.2 (volumul II).

Dar energia potențială nu este numai gravitațională, ea poate fi și elastică. Un resort tensionat are o energie potențială mai mare decît în starea netensionată. Conform echivalenței între masă și energie, rezultă că resortul în starea tensionată are o masă mai mare decît în starea netensionată. Această creștere a masei trebuie să apară fie într-o operație de cîntărire, fie într-o ciocnire a resortului tensionat cu alt corp.

În fine, echivalența între masă și energie trebuie analizată în legătură cu eliberarea energiei de legătură. Energia de legătură este pusă în libertate la formarea unei configurații a substanței: moleculă, atom, nucleu. Din echivalența masă-energie rezultă că la eliberarea energiei de legătură Φ, masa corpului rezultat trebuie să scadă, scăderea masei este dată de relația (9.8)

$$\Delta m = \frac{\Phi}{c^2} \tag{9.10}$$

Această consecință foarte importantă a echivalenței masă-energie se poate exemplifica pentru cele trei configurații studiate mai înainte: molecula de

CO_2, atomul de hidrogen și nucleul de deuteriu. Fie $m_1, m_2, ..., m_i$, masele particulelor componente și m masa configurației formate; de exemplu, pentru molecula de CO_2, particulele componente sînt atomii de carbon și de oxigen, pentru atomul de hidrogen, protonul și electronul, iar pentru nucleul de deuteriu, protonul și neutronul. Suma maselor particulelor componente înainte de formarea configurației fiind Σm_i, scăderea masei la „legarea" particulelor componente este $\Delta m = \Sigma m_i - m$. Cunoscînd valorile energiei de legătură Φ, date în § 9.2, se poate calcula scăderea masei Δm cu ajutorul relației (9.10). Folosind masele m ale celor trei configurații se poate determina variația relativă a masei, $\Delta m/m$, pentru fiecare configurație; rezultatele obținute din aceste calcule sînt redate în tabelul 9.1.

Tabelul 9.1

Energiile de legătură și variațiile de masă echivalente pentru trei configurații ale substanței
($c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s)

Configurațiile substanței	Energia de legătură Φ		$\Delta m = \frac{\Phi}{c^2}$	m	$\frac{\Delta m}{m}$
	eV	J	kg	kg	
Molecula de CO_2	4,1	$6{,}6.10^{-19}$	$7{,}3.10^{-36}$	$7{,}3.10^{-26}$	10^{-10}
Atomul de hidrogen	14	$2{,}2.10^{-18}$	$2{,}4.10^{-35}$	$1{,}7.10^{-27}$	10^{-8}
Nucleul de deuteriu	$2{,}2.10^6$	$3{,}5.10^{-13}$	$3{,}9.10^{-30}$	$3{,}3.10^{-27}$	10^{-3}

Observînd valorile raportului $\Delta m/m$, date în tabelul 9.1 rezultă că scăderea masei la formarea moleculei de CO_2 și a atomului de hidrogen, care are valori foarte scăzute nu poate fi măsurată cu tehnica actuală, însă scăderea masei la formarea nucleului de deuteriu poate fi pusă în evidență, ea reprezentînd o valoare măsurabilă. S-a arătat experimental că masa nucleului de deuteriu este mai mică decît suma între masa protonului și aceea a neutronului, diferența dintre aceste mase avînd exact valoarea calculată după procedeul indicat mai sus.

Se menționează că formarea moleculei de CO_2 are loc la arderea oricărui combustibil. Deși în unele situații ard cantități enorme de combustibil, scăderea masei produsului rezultat prin ardere (bioxidul de carbon) nu poate fi pusă în evidență în comparație cu masa compușilor inițiali (cărbunele sau alt combustibil, și oxigenul) din cauza valorii extrem de mici a variației relative a masei, $\Delta m/m$ (v. tabelul 9.1).

În încheiere se subliniază faptul că în conformitate cu echivalența între masă și energie, oricărei eliberări de energie îi corespunde o scădere a masei. Această eliberare de energie are loc în reacțiile chimice care conduc la formarea compușilor chimici sau în reacțiile nucleare care conduc la formarea elementelor. De exemplu, datorită reacțiilor nucleare care au loc în Soare, Soarele eliberează energie sub formă de energie radiantă, care are ca rezultat scăderea masei sale, așa cum se poate vedea în aplicația care urmează.

Aplicație

La suprafața exterioară a atmosferei Pământului, energia care vine de la Soare este caracterizată printr-un debit al energiei de 1 350 W/m^2. Această mărime se numește de obicei *constanta solară* și s-a măsurat prin determinarea energiei totale primite de la Soare, în toate domeniile spectrului radiațiilor electromagnetice. Știind că distanța medie Soare-Pământ este $d = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, și presupunînd că energia emisă de Soare se repartizează uniform pe suprafața $4\pi d^2$ a sferei de rază d, care are Soarele în centru, rezultă că Soarele radiază în fiecare secundă o energie de $3{,}9 \cdot 10^{26}$ J. Energiei eliberate de Soare în fiecare secundă îi corespunde o scădere a masei, Δm, calculată cu ajutorul relației (9.8),

$$\Delta m = \frac{3{,}9 \cdot 10^{26}\ \text{J}}{c^2} = 4{,}3 \cdot 10^9\ \text{kg}$$

Prin urmare, conform echivalenței masă-energie, prin energia sa radiantă Soarele suferă o pierdere din masa sa de 4 300 000 t/s. Știind că masa Soarelui este $2 \cdot 10^{30}$ kg, înseamnă că această scădere ar duce la consumarea completă a masei sale în $2 \cdot 10^{13}$ ani!

Trebuie precizat că scăderea masei Soarelui nu se datorește numai energiei pe care acesta o radiază în spațiu; masa Soarelui mai scade și datorită substanței aruncată în spațiu, sub formă de particule, electroni, protoni și sub formă de nuclee ale unor atomi, în special nuclee de heliu. Fasciculele de particule încărcate electric care pornesc din Soare formează ceea ce astrofizicienii numesc *vînt solar*. Din cauza atmosferei Pământului și a cîmpului magnetic pămîntesc, la suprafața Pământului este dificil de măsurat intensitatea vîntului solar și de aceea în cadrul programului Apollo de experimentări pe Lună, s-a inclus studiul vîntului solar. Concluzia investigațiilor privind constituția și intensitatea vîntului solar a fost aceea că în vîntul solar predomină nucleeele de heliu iar că intensitatea sa este $6{,}3 \cdot 10^{11}$ nuclee de heliu/$m^2 \cdot$ s. Ținînd seama de distanța d Soare-Lună și presupunînd că Soarele trimite izotrop în spațiu substanța sa, adică aceasta se repartizează uniform pe sfera de arie $4\pi d^2$, rezultă că el trimite în spațiu 1 300 000 tone/s de heliu. Aceasta înseamnă că scăderea masei Soarelui în timp se datorește în mai mare măsură emisiei de energie și în mai mică măsură aruncării de substanță sub formă de particule.

9.5. Legea conservării energiei

Așa cum s-a arătat în § 9.3, energia totală, adică suma între energia cinetică și energia potențială rămîne constantă în cîmpul gravitațional în lipsa frecării. În multe cazuri frecarea este absentă, cazul mișcării planetelor în jurul Soarelui, sau este neglijabilă, cazul unui pendul construit special în acest scop.

Conservarea energiei are loc nu numai în cîmpul gravitațional ci și în cîmpul electric. Ceva mai mult, energia unui corp sau a unui sistem de corpuri se conservă chiar și în lipsa unui cîmp. De exemplu, la legea conservării impulsului (§ 5.2) s-a arătat că, în lipsa unei interacțiuni, un corp își păstrează impulsul neschimbat. Aceasta înseamnă că viteza corpului nu se modifică și deci energia sa cinetică rămîne constantă. Prin urmare în spațiul lipsit de cîmpuri gravitaționale, un corp, căruia i s-a transmis inițial o anumită energie cinetică, va păstra neschimbată energia sa cinetică.

Legea conservării energiei se enunță, ca și legea conservării impulsului pentru un *sistem închis*, care este un sistem de corpuri asupra căruia nu se exercită nici o acțiune din exteriorul sistemului.

Într-un sistem închis, care suferă un anumit proces, energia totală se conservă; sau, *energia nu se creează și nu se distruge, ea trece de la un corp la altul al sistemului, astfel încît energia totală a sistemului rămîne constantă.*

Legea conservării energiei se aplică în orice *interacțiune* (ciocnire, interacțiune gravitațională, interacțiune electrică etc.), și se referă la orice *formă de energie* (cinetică, potențială, de legătură etc.).

Pentru termodinamică este interesantă acea formulare a legii conservării energiei care conține lucrul pe care un sistem îl poate efectua sau care este efectuat asupra sistemului. În § 9.1 s-a arătat că lucrul și energia sînt mărimi interschimbabile și s-a arătat cum efectuarea unui lucru de către un corp conduce la scăderea energiei cinetice a corpului. În cazul energiei potențiale a unui corp, aceasta crește dacă lucrul unei forțe imprimate se efectuează asupra corpului. Pe baza considerațiilor făcute în § 9.1 se poate enunța astfel legea conservării energiei:

Lucrul primit de către un sistem este egal cu creșterea energiei sale, iar lucrul cedat de sistem este egal cu scăderea energiei sale.

Această exprimare a legii conservării este suficientă pentru mecanică, dar ea trebuie completată prin specificarea formelor de energie pentru procesele termodinamice (v. capitolele 11 și 12).

În cele ce urmează se aplică legea conservării energiei la cîteva fenomene. La *ciocnirea elastică* a două corpuri legea conservării energiei afirmă că *suma energiilor lor înainte de ciocnire este egală cu suma energiilor celor două corpuri după ciocnire.* Prin folosirea legii conservării energiei se pot determina vitezele finale ale celor două corpuri dacă se cunosc masele lor și vitezele înainte de ciocnire. În aproximația nerelativistă, dacă masele corpurilor sînt m_1 și m_2, iar vitezele lor sînt V_1 și respectiv V_2 înainte de ciocnire și V_1' și respectiv V_2' după ciocnirea centrică (vitezele au aceeași direcție, înainte și după ciocnire) legea conservării energiei se scrie

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1'^2}{2} + \frac{m_2V_2'^2}{2} \tag{9.11}$$

Această ecuație are două necunoscute, V_1' și V_2' și pentru rezolvarea ei mai este necesară încă o ecuație, care este dată de legea conservării impulsului, relația (5.2),

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2'$$

Rearanjînd termenii celor două ecuații se obține

$$m(V_1^2 - V_1'^2) = m_2(V_2'^2 - V_2^2)$$

$$m_1(V_1 - V_1') = m_2(V_2' - V_2)$$

Împărțind cele două relații una la cealaltă, rezultă

$$\frac{V_1^2 - V_1'^2}{V_1 - V_1'} = \frac{V_2'^2 - V_2^2}{V_2' - V_2}$$

$$V_1 + V_1' = V_2' + V_2 \tag{9.12}$$

Valoarea lui V_1', determinată din ultima relație, se introduce în relația dată de legea conservării impulsului și se deduce V_2'

$$V_2' = \frac{(m_2 - m_1)V_2 + 2m_1V_1}{m_1 + m_2} \tag{9.13}$$

Eliminînd pe V_2' în relațiile (9.12) și (9.13) se obține

$$V_1' = \frac{(m_1 - m_2)V_1 + 2m_2V_2}{m_1 + m_2} \tag{9.14}$$

În cazul ciocnirii elastice și centrice a două corpuri la fel de masive ($m_1 = m_2$), din relațiile (9.13) și (9.14) rezultă

$$V_2' = V_1; \qquad V_1' = V_2$$

În ceea ce privește aplicarea legii conservării energiei la *ciocnirea plastică*, trebuie arătat că energia cinetică a corpului rezultat prin alipirea celor două corpuri inițiale din experimentul *B*, examinat în § 5.1, este zero, deoarece viteza sa este egală cu zero. Ca urmare energia cinetică a corpurilor înainte de ciocnire este diferită de zero, dar după ciocnire este egală cu zero. Ciocnirea plastică este un caz limită; în realitate se întîlnește o *ciocnire neelastică* la care atît caracterul elastic cît și caracterul plastic intră în competiție. Caracterizarea unei ciocniri ca elastică sau neelastică se face pe baza conservării energiei cinetice. O ciocnire între două corpuri este elastică dacă energia cinetică a corpurilor se conservă și este neelastică dacă energia cinetică a corpurilor nu se conservă.

Cum se aplică legea conservării energiei în cazul ciocnirii a două corpuri a căror energie cinetică nu se conservă? Experimental se arată că în urma ciocnirii plastice apare o altă formă de energie și anume energia termică. Aceasta înseamnă că are loc o transformare a energiei cinetice în energie termică. În ciocnirea plastică, în care viteza finală este zero, toată energia cinetică s-a transformat în energie termică, pe cînd în ciocnirea neelastică numai o parte din energia cinetică s-a transformat în energie termică. Întrucît legea conservării energiei este o lege universal valabilă se spune că în oricare tip de ciocnire *energia totală* a celor două corpuri se conservă; asupra acestei probleme se va reveni în paragraful următor.

Un alt caz al aplicării legii conservării energiei este interacțiunea dintre două particule microscopice (molecule, atomi, nuclee) în care intervine și o *reacție chimică* sau *nucleară*. Astfel, în urma unei asemenea reacții, din particulele componente A și B se formează configurația AB

$$A + B \rightarrow AB$$

Trei exemple de reacții au fost situate în § 9.2 din punctul de vedere al energiei de legătură Φ și anume acelea care conduc la molecula de CO_2, atomul de hidrogen și nucleul de deuteriu. Ca să se întîlnească și să aibă loc reacția, particulele A și B vin una către cealaltă, adică au energiile cinetice E_A și E_B. În urma reacției se formează configurația AB care va continua mișcarea și care are energia E_{AB}. Pentru a putea aplica legea conservării energiei trebuie să se țină seama și de *energia de legătură* care se eliberează la formarea lui AB

$$E_A + E_B + \Phi = E_{AB} \tag{9.15}$$

Din relația (9.15) se observă că energia cinetică E_{AB} a configurației formate AB este egală cu suma energiilor particulelor componente A și B și energia de legătură Φ pusă în libertate la formarea lui AB din A și B. Energia de legătură este preluată ca energie cinetică de AB. Relația (9.15) este deseori folosită la ciocnirea particulelor elementare care formează împreună configurații noi.

Notă.

În relația (9.15) s-a presupus că energia de legătură Φ este eliberată la formarea configurației AB, adică $\Phi > 0$, așa cum se întîmplă în general în fizică. În cazul substanțelor endoenergetice, întîlnite în chimie, pentru care $\Phi < 0$, relația (9.15) este fără importanță deoarece mișcarea componentelor A și B, ca și a configurației AB nu este luată în considerare.

Un ultim exemplu al aplicării legii conservării energiei este acela al *anihilării substanței cu antisubstanța.* Se știe că o particulă se anihilează cu antiparticula sa; de exemplu, electronul pozitiv se anihilează cu electronul negativ. Prin anihilare apar două radiații electromagnetice — radiații de anihilare — care nu au masă de repaus, deși electronii din anihilarea cărora au rezultat au masă de repaus. Întrucît cel mai probabil electronul pozitiv se anihilează cu cel negativ cînd ambii sînt în repaus, în exprimarea legii conservării energiei nu intervine energia cinetică a acestora ci numai energia lor de repaus, m_0c^2, m_0 fiind masa de repaus a electronului. Ca urmare, legea conservării energiei pentru anihilarea electronului pozitiv cu cel negativ are forma

$$(m_0c^2)_{e^+} + (m_0c^2)_{e^-} = 2m_0c^2 = 2W_a,$$

unde $2W_a$ este energia celor două radiații de anihilare. Întrucît pentru electron, energia de repaus m_0c^2 este o constantă și are valoarea 0,51 MeV, rezultă că radiația de anihilare are totdeauna energia

$$W_a = 0{,}51 \text{ MeV}$$

În încheierea acestui paragraf trebuie subliniat faptul că, spre deosebire de *conservarea energiei,* pentru care există o lege de conservare, problema *conservării masei* se pune cu totul altfel. În chimie și în tehnică, se ține seama de faptul că masa se conservă, dar în fizică și în special în fizica microscopică nu se poate vorbi de o conservare a masei. Masa și energia sînt două mărimi echivalente, legate între ele prin relația (9.6) sau (9.8). Masa unui corp se poate modifica ca urmare a faptului că energia se eliberează sau se absoarbe. În fenomenul de anihilare masa celor două particule inițiale — electronii — se anulează și apare energia electromagnetică ca energie echivalentă masei. La descrierea proceselor din natură cu ajutorul legii conservării energiei, trebuie să se ia în considerare toate *formele de energie* care intră în competiție și deci și *energia de repaus,* care conține masa de repaus a corpurilor care iau parte în acel proces.

9.6. Energia termică și energia internă

În § 9.3 s-a arătat că, în cîmpul gravitațional, energia cinetică a unui corp se poate transforma în energie potențială. Astfel, dacă se aruncă un corp la o înălțime h, pe măsură ce înălțimea crește, energia sa cinetică des-

creşte pe seama energiei potenţiale. Există totuşi fenomene în care energia cinetică scade fără ca energia potenţială să crească. De exemplu, un corp care se mişcă pe un plan orizontal (h = constant) şi căruia i se dă iniţial o anumită energie cinetică, datorită căreia se mişcă, îşi pierde energia cinetică fără ca energia sa potenţială să se modifice, ajungînd ca în cele din urmă să se oprească. Un alt exemplu este acela al unui pendul; oscilaţiile pendulului se datoresc unei energii iniţiale care i se transmite printr-un mijloc oarecare. Energia primită de către pendul este energia sa totală care devine energia cinetică maximă cînd masa pendulantă trece prin poziţia de repaus şi energia potenţială maximă cînd masa pendulantă trece prin una din poziţiile sale extreme. În timp oscilaţiile pendulului se micşorează, iar în cele din urmă pendulul se opreşte complet ca urmare a pierderii energiei sale totale.

În exemplele de mai sus cele două corpuri ajung în stare de repaus, deoarece în desfăşurarea proceselor respective intervine *frecarea*, al cărei efect în absenţa vreunei forţe fundamentale este scăderea energiei cinetice sau a energiei totale a corpurilor pînă la anulare. Dacă asupra corpului nu acţionează alte forţe, scăderea energiei cinetice sau a energiei totale este cu atît mai redusă cu cît forţa de frecare este mai mică, dar starea finală a corpului este totdeauna starea de repaus. De exemplu, o roată axată pe rulmenţi îşi păstrează energia cinetică de rotaţie multă vreme, deoarece în acest caz frecarea este redusă. Totuşi, în cele din urmă, roata ajunge în repaus, dacă nu există alte forţe care să acţioneze asupra ei.

Nu există sisteme mecanice lipsite de frecare. De-a lungul secolelor oamenii au căutat să realizeze sisteme mecanice fără frecare, adică sisteme care să păstreze nedefinit în timp o anumită mişcare fără a li se da continuu energie din exterior; un asemenea sistem se numeşte *perpetuum mobile*. Într-un număr foarte mare de experimente, s-a constatat că, deoarece nu există sisteme mecanice fără frecare, „mişcarea perpetuă" a sistemelor mecanice nu poate exista. Se întîlneşte mişcare perpetuă la mişcarea particulelor microscopice; de exemplu, moleculele unui gaz se mişcă fără încetare, iar această mişcare se numeşte *mişcarea browniană*.

Mişcarea planetelor în jurul Soarelui şi a sateliţilor în jurul planetelor, se apropie cu atît mai mult de mişcarea perpetuă cu cît frecarea care apare în mişcare este mai redusă. La mişcarea de rotaţie a Pămîntului, frecarea straturilor de apă din mări şi oceane, care are loc în fenomenul mareelor, are ca efect scăderea energiei cinetice de rotaţie a Pămîntului. Acest efect al frecării straturilor de apă este foarte mic, dar el a fost totuşi pus în evidenţă în astronomie. Mişcarea unei planete fără hidrosferă sau a unui satelit de asemenea lipsit de hidrosferă în jurul unei planete constituie o mişcare perpetuă din cauza lipsei forţelor de frecare.

Trebuie precizat totuşi că posibilitatea mişcării perpetue în natură nu infirmă legea conservării energiei. Oamenii au căutat să producă sisteme mecanice cu mişcare perpetuă în vederea realizării unor mecanisme a căror mişcare să întreţină maşini necesare muncii sale. Aceste mecanisme ar fi trebuit să furnizeze energie continuu, fără consum de combustibil sau fără aport de energie din exterior. Asemenea mecanisme, numite *perpetuum mobile de specia I*, nu pot fi realizate deoarece ele ar contrazice legea conservării energiei.

Un alt caz în care energia cinetică se micşorează sau se anulează este *ciocnirea plastică*. În acest caz frecarea intervine prin deformarea plastică

a corpurilor care se ciocnesc. Astfel, de exemplu, dacă o bilă din plumb cade pe un suport de asemenea din plumb, ca urmare a ciocnirii plastice care are loc, bila rămîne pe suport, ceea ce înseamnă că energia ei cinetică s-a anulat.

În cazul a două corpuri de masă m_1 și m_2, care suferă o ciocnire plastică, se poate studia ciocnirea celor două corpuri față de sistemul inerțial în care corpul cu masa m_2 este inițial în repaus. În acest sistem inerțial corpul cu masa m_1 se mișcă cu viteza V_1; deci V_1 este viteza relativă a corpului cu masa m_1 față de corpul cu masa m_2. Corpul care rezultă după ciocnire are masa $m_1 + m_2$ și viteza V față de același sistem de referință. Scriind conservarea impulsului în sistemul inerțial ales

$$m_1 V_1 + 0 = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

Energia cinetică totală înaintea ciocnirii, E_i, este $E_i = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, deoarece al doilea corp este în repaus și nu are energie cinetică. Energia cinetică a corpului rezultat după ciocnire, adică energia finală E_f, va fi

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} V_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 V_1^2}{m_1 + m_2}$$

Raportul energiilor cinetice

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

reprezintă fracțiunea din energia cinetică inițială care s-a transformat în altă formă de energie. Cîteva cazuri sînt interesante

a) $m_1 = m_2$; $\quad E_f/E_i = 1/2$

jumătate din energia cinetică inițială nu se mai regăsește ca energie cinetică a corpului final, deoarece s-a transformat în altă formă de energie;

b) $m_1 \gg m_2$; $\quad E_f/E_i = 1$

deoarece masa m_2 se neglijează față de masa m_1; rezultă că toată energia cinetică inițială se regăsește la corpul final;

c) $m_1 \ll m_2$; $\quad E_f/E_i = 0$

toată energia cinetică inițială se transformă în altă formă de energie, corpul final rămînînd în repaus; acesta este cazul unui meteorit care lovește Pămîntul, deoarece masa meteoritului este neglijabilă în comparație cu aceea a Pămîntului.

Conform legii conservării energiei, care se aplică la toate fenomenele, trebuie ca în exemplele de mai sus să se admită că energia cinetică s-a transformat într-o altă formă de energie. Întrucît efectul observabil și măsurabil, în aceste cazuri este creșterea temperaturii, noua formă de energie rezultată se numește *energie termică*. În toate experimentele descrise, tempe-

ratura corpurilor prezente crește, cu alte cuvinte aceste corpuri *capătă energie termică pe seama energiei cinetice.* Substanța este formată din molecule și atomi care se mișcă continuu în interiorul corpurilor. În interacțiunile descrise mai sus, energia cinetică a corpurilor macroscopice se transmite ca energie cinetică a moleculelor sau a atomilor care intră în compoziția acelor corpuri. Prin urmare energia termică este energia de mișcare a particulelor constituente ale substanței; această mișcare se execută sub forma vibrației sau a rotației particulelor constituente în jurul pozițiilor de echilibru sau sub forma mișcării haotice ca în cazul gazelor. Cu cît energia termică a unui corp este mai mare, cu atît viteza de vibrație sau de rotație a particulelor lui constituente este mai mare.

Datorită forțelor care acționează între molecule, acestea au, pe lîngă energie cinetică, și energie potențială. Suma energiilor potențiale și cinetice ale tuturor moleculelor constituente ale unui corp se numește *energie internă*; energia internă depinde de structura internă a corpurilor.

9.7. **Principiile fizice ale energeticii**

Din cele mai vechi timpuri, omul a fost preocupat de obținerea energiei necesare nevoilor sale. La început el a folosit *energia mecanică* produsă de anumite fenomene: vîntul și rîurile. Energia mecanică furnizată de vînt și de rîuri se datorește *energiei solare* care, încălzind neuniform Pămîntul, produce mișcarea aerului, deci vîntul, și de asemenea tot ea produce evaporarea apei din mări și oceane, contribuind astfel la alimentarea rîurilor.

În afara celor menționate mai sus, energia solară joacă un rol important din punctul de vedere al realizării surselor de energie la îndemîna omului. Datorită energiei solare are loc în plante fenomenul de fotosinteză prin care se produce *substanța organică.* Această substanță ajunsă la adîncimi mari în scoarța Pămîntului, ca urmare a unor fenomene geologice, a generat, la presiunea și la căldura existentă acolo, rezervele de combustibil ale planetei noastre: cărbunii, țițeiul și gazele.

Energetica se preocupă continuu de energia solară și caută mijloace de folosire directă a acesteia. Debitul energiei solare la suprafața Pămîntului este apreciabil; la suprafața exterioară a atmosferei pămînteşti acesta are valoarea 1 350 W/m^2 și scade, datorită absorbției în atmosferă, pînă la 1 060 W/m^2 la nivelul mării, valoare care reprezintă un maxim și anume în cazul unui cer senin cu soarele la zenit. Debitul energiei solare prezintă interes energetic chiar și la valori mai mici; de exemplu, cu Soarele la 20° deasupra orizontului și cu cerul acoperit de nori valoarea debitului de energie solară este 100 W/m^2 și poate fi totuși folosit. Energia solară este folosită direct la producerea electricității prin celule solare, la încălzirea cuptoarelor solare, la obținerea apei potabile prin distilarea apei sărate din mări și oceane etc.

Trebuie menționat că energia primită de Pămînt de la Soare este enormă: într-un an Pămîntul primește 10^{25} J, valoare care depășește energia ce s-ar obține prin arderea tuturor rezervelor de cărbuni ale planetei (10^{13} tone cărbuni produc 3.10^{23} J).

Foarte importantă în energetică este *folosirea energiei de legătură* a moleculelor și, în ultimul timp, energia de legătură a nucleelor. Energia de legătură a bioxidului de carbon, CO_2, eliberată la arderea combustibililor, se numește

în tehnică *puterea calorifică* a combustibilului. Puterea calorifică se raportează la 1 kg de combustibil şi se exprimă în MJ/kg. Cu ajutorul valorilor date în § 9.2 se calculează pentru carbon (1 kmol = 12 kg)

$$\Phi' = \frac{395}{12} = 33 \text{ MJ/kg}$$

iar pentru hidrogen (1 kmol = 2 kg)

$$\Phi' = \frac{284}{2} = 142 \text{ MJ/kg}$$

Din punctul de vedere al puterii calorifice, combustibilii, printre care s-a inclus şi hidrogenul, se prezintă astfel

cărbuni	20... 30 MJ/kg
petrol, benzină	42 MJ/kg
metan	54 MJ/kg
hidrogen	142 MJ/kg

Se observă că hidrogenul are cea mai mare putere calorifică, dar folosirea lui drept combustibil nu este avantajoasă, fiind foarte scump; hidrogenul este folosit numai la alimentarea motoarelor rachetelor şi, chiar în acest caz, numai la alimentarea treptelor superioare ale rachetei (vezi tabelele 8.4 şi 8.5). Valoarea energetică deosebit de mare a hidrogenului este cauza utilizării lui în *pilele de combustie*. Prin arderea hidrogenului în aceste pile, căldura de ardere se transformă direct în electricitate. Această sursă de energie electrică este folosită actualmente pentru nevoile energetice ale sateliţilor artificiali şi ale navelor cosmice. În acest caz, arderea hidrogenului furnizează echipajului energie electrică, energie termică, iar produsul arderii, apa, este utilizată ca atare.

În ceea ce priveşte folosirea, pentru alimentarea motoarelor rachetelor, a substanţelor combustibile (carburanţii), trebuie subliniat faptul că orice combustibil are nevoie de un oxidant pentru efectuarea arderii lui, oxidant numit de obicei comburant. Oxigenul este un comburant. La motoarele rachetelor consumul de carburant este atît de mare încît nu este suficient oxigenul din mediul înconjurător, iar în afara atmosferei Pămîntului nu există oxigen. Pentru acest motiv, motoarele rachetelor au rezervoare atît pentru carburant cît şi pentru comburant. Carburantul şi comburantul necesar unui motor alcătuiesc ceea ce se numeşte *propulsantul* motorului respectiv.

În calculul cantităţii de propulsant necesar unui motor, trebuie să se ţină seama de puterea calorifică a propulsantului folosit (vezi § 8.7). Pentru aceasta se consideră reacţia de ardere a carburantului; de exemplu, pentru kerosen (carburant asemănător benzinei, cu formula chimică aproximativă C_6H_{12}), şi pentru hidrogen reacţiile de ardere se scriu

$$\underset{84 \text{ kg}}{C_6H_{12}} + 9\ O_2 \rightarrow \underset{288 \text{ kg}}{6CO_2} + 6\ H_2O$$

$$\underset{2 \text{ kg}}{H_2} + \underset{16 \text{ kg}}{O} \rightarrow H_2O$$

S-au indicat sub formule cantităţile de carburant şi comburant necesare, calculate cu ajutorul maselor moleculare. Energiile obţinute pentru aceste cantităţi sînt

kerosen $\quad 84\ \text{kg} \times 42\ \text{MJ/kg} = 3\,800\ \text{MJ}$

hidrogen $\quad 2\ \text{kg} \times 142\ \text{MJ/kg} = 284\ \text{MJ}$

Cu aceste valori se calculează puterile calorifice ale propulsantului Φ'' (raportate la kilogramul de propulsant, adică la suma cantităţilor de carburant şi comburant care au intrat în reacţie)

kerosen $$\Phi'' = \frac{3\,800\ \text{MJ}}{(84 + 288)\ \text{kg}} = 10\ \text{MJ/kg}$$

hidrogen $$\Phi'' = \frac{284\ \text{MJ}}{(2 + 16)\ \text{kg}} = 16\ \text{MJ/kg}$$

Folosirea în energetică a energiei de legătură a nucleelor constituie principiul *reactorilor nucleari* şi al *instalaţiilor termonucleare*. Acestea din urmă nu au ajuns încă a fi utilizate din punct de vedere energetic, dar ele oferă o mare perspectivă pentru viitor din acest punct de vedere. Principiile fizice ale fenomenelor care au loc în reactorii nucleari şi în cei termonucleari vor fi analizate în capitolele de fizica nucleului. Pentru moment, se subliniază doar faptul că energia de legătură a nucleelor are valori foarte mari în comparaţie cu energia de legătură a moleculelor (v. § 9.2). Astfel, de exemplu, la formarea unui kilomol ($\mathcal{N} = 6 \cdot 10^{26}$ nuclee) de deuteriu prin sinteza hidrogenului se obţine

$$\Phi = 2{,}2 \cdot 10^{6}\ \text{eV} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}} \times 6 \cdot 10^{26}\ \text{kmol}^{-1} = 2 \cdot 10^{14}\ \text{J/kmol}$$

Deoarece un kilomol de deuteriu are 2 kg, se obţine o „putere calorifică"

$$\Phi' = \frac{2 \cdot 10^{14}}{2} = 10^{14}\ \text{J/kg}$$

Această energie de legătură enormă ca mărime nu este actualmente la dispoziţia energeticii, dar tocmai valoarea ei foarte mare face foarte probabilă folosirea ei în viitor.

În fine, ultima formă de obţinere a energiei, care este mult discutată azi, în legătură cu explorarea spaţiului, este *anihilarea substanţei cu antisubstanţa*. Aşa cum s-a menţionat şi în § 9.5, o particulă se anihilează cu antiparticula sa, ceea ce are ca efect eliberarea energiei de repaus m_0c^2 a particulelor care se anihilează. Este adevărat că tehnica actuală nu dispune încă de posibilitatea folosirii energiei de anihilare, dar s-a inclus aici acest mod de obţinere a energiei pentru că literatura de specialitate menţionează şi această posibilitate energetică, alături de celelalte, în explorarea spaţiului. Energia care se poate obţine la anihilarea substanţei cu antisubstanţa pentru $m_0 = 1$ kg este

$$m_0c^2 = 9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg} \cong 10^{17}\ \text{J/kg}$$

Notă.

Substanţele explozive nu interesează direct energetica, dar ele constituie un mijloc de înmagazinare a unei energii care se eliberează apoi la momentul dorit. Explozivii sînt substanţe endoterme, care au nevoie de energie la formarea lor, iar la descompunerea moleculei eliberează o cantitate de energie relativ mare într-un timp foarte scurt. Astfel, pentru orientare, energia eliberată de explozivii mai utilizaţi are valorile

trinitrotoluen (TNT)	4 MJ/kg
nitroglicerină	6,3 MJ/kg

Se observă că aceste energii sînt mult mai mici decît cele eliberate la arderea combustibililor, dar caracteristica explozivilor este timpul foarte scurt în care această energie se eliberează.

Trinitrotoluenul (TNT) este explozivul convenţional luat ca referinţă pentru explozivii nucleari; astfel în energetica exploziilor nucleare se folosesc unităţile

1 kt TNT	pentru $4 \cdot 10^{12}$ J
1 Mt TNT	pentru $4 \cdot 10^{15}$ J

Aplicaţie.

Consideraţiile făcute în § 9.7 asupra diferitelor surse energetice disponibile actualmente sau în perspectivă pot fi aplicate la evaluarea posibilităţii unor călătorii spaţiale. În § 4.7 s-a văzut că realizarea unor călătorii spaţiale cere o anumită viteză de deplasare a navei (vezi tabelul 4.2). Cum unele viteze sînt relativiste, energia necesară se calculează luînd în considerare expresia relativistă a energiei

$$E = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1)$$

deoarece $m = m_0 \cdot \gamma$. Cu această expresie s-a calculat energia raportată la masa m_0

$$\frac{E}{m_0} = c^2(\gamma - 1)$$

şi, de asemenea, energia necesară unei nave avînd masa $m_0 = 100$ tone $= 10^5$ kg; astfel s-au obţinut valorile date în tabelul 9.2. În aceste valori s-a neglijat energia de evadare din cîmpul gravitaţional al Pămîntului ($\sim 10^8$ J/kg) care ar afecta numai viteza de 20 km/s. S-a calculat de asemenea şi cantitatea de substanţă necesară pentru propulsarea navei, ţinînd seama de energiile eliberate de către diferitele surse energetice analizate în § 9.7 (prin propulsare chimică se înţelege folosirea reacţiei chimice între carburant şi comburant, adică arderea carburantului) şi anume

propulsare chimică	10^7 J/kg
propulsare nucleară	10^{14} J/kg
propulsare prin anihilare	10^{17} J/kg

Cantităţile calculate sînt „minime" deoarece nu s-a ţinut seama de energia de mişcare a propulsantului ; or acesta nu se consumă deodată şi trebuie pus în mişcare odată cu nava, dîndu-i-se energie cinetică.

Tabelul 9.2

Cantitatea de propulsant minimă necesară obținerii vitezelor din tabelul 4.2 pentru un corp cu masa $m=10^5$kg

Viteza de deplasare	γ	$\frac{E}{m_0}$ J/kg	E J	Cantitatea minimă de propulsant		
				chimic kg	nuclear kg	prin anihilare kg
20 km/s	1	10^8	10^{13}	10^6	10^{-1}	10^{-4}
100 km/s	1	10^{10}	10^{15}	10^8	10	10^{-2}
0,5 c	1,15	10^{16}	10^{21}	10^{14}	10^7	10^4
$(1-10^{-11})c$	2.10^5	10^{22}	10^{27}	10^{20}	10^{13}	10^{10}

După cum se vede în tabelul 9.2 o navă de 100 tone ar avea nevoie cu aproximația făcută, de 1 000 tone propulsant chimic (de exemplu, kerosen + oxigen) ca să ajungă la viteza 20 km/s, de 0,01 tone combustibil nuclear ca să ajungă la 100 km/s și de 10 tone substanță plus antisubstanță, ca să realizeze prin anihilare viteza de 0,5 *c*. Se observă că realizarea unei viteze mai mari decît 0,5 *c*, chiar cu propulsare prin anihilare, este o problemă dificilă pentru stadiul actual al cunoștințelor noastre, deoarece necesită cantități enorme de propulsant. Sub liniile punctate sînt valori pentru care nu se întrevăd actualmente soluții realizabile.

Capitolul 10

Mecanica statistică

10.1. Legea gazului perfect

Corpurile de dimensiuni finite (macroscopice), de care se ocupă mecanica, sînt formate din molecule şi atomi, adică din „obiecte" microscopice.

Constituenţii microscopici ai substanţei sînt într-o mişcare continuă — o mişcare perpetuă. *Mişcarea browniană,* studiată în fizica de liceu, pune în evidenţă în mod indirect mişcarea continuă a moleculelor dintr-un lichid sau a moleculelor dintr-un gaz. Mişcarea continuă a moleculelor înlăuntrul unui corp este o caracteristică importantă a „structurii" corpului şi pentru acest motiv fizica a căutat să stabilească dependenţa între proprietăţile macroscopice şi acelea caracteristice mişcării continue a constituenţilor microscopici.

Mecanica statistică are ca obiect deducerea proprietăţilor corpurilor macroscopice din parametrii mişcării continue a obiectelor microscopice. Întrucît obiectele microscopice nu pot fi urmărite individual, studiul mişcării acestora se face urmărind ansamblurile de obiecte microscopice; ca urmare se foloseşte o metodă statistică şi de aceea această parte a mecanicii se numeşte *mecanica statistică.*

Deducerea proprietăţilor macroscopice din cele microscopice este mai uşoară pentru o structură microscopică mai simplă, cum se întîmplă în cazul gazelor. Moleculele unui gaz se găsesc la distanţe suficient de mari unele de altele, astfel încît în studiul mişcării lor se pot neglija forţele de interacţiune dintre moleculele gazului. Din analiza ciocnirilor moleculelor unui gaz se pot deduce anumite proprietăţi macroscopice ale gazului. Deoarece mecanica ciocnirilor moleculelor nu este influenţată de natura moleculelor, proprietăţile macroscopice deduse din analiza ciocnirilor moleculelor sînt aceleaşi pentru diferite gaze, independent de natura lor. Acesta este rezultatul principal al *teoriei cinetice a gazelor,* cunoscută din fizica de liceu şi al cărei studiu va fi reluat, din punctul de vedere al acestei cărţi, în § 10.2.

În acest paragraf va fi examinată legea gazului perfect care este necesară atît în acest capitol cît și în cele următoare. Această lege va fi prezentată numai pentru gazul perfect, singurul care va fi studiat în aceste capitole. În fizica de liceu s-a arătat deosebirea între gazul perfect și gazele reale. Gazul perfect reprezintă o aproximație destul de bună a gazelor reale și de aceea atît mecanica statistică cît și termodinamica, la nivelul acestei cărți, pot fi prezentate numai cu ajutorul gazului perfect. În ceea ce privește aproximația unui gaz real ca gaz perfect, trebuie să precizăm că multe din gazele reale se comportă ca un gaz perfect în anumite condiții de temperatură și presiune. În special la presiuni mici, cînd moleculele gazului sînt mai depărtate între ele, un gaz real poate fi aproximat ca un gaz perfect.

Dacă p este presiunea unui gaz perfect, conținut într-un recipient de volum v, a cărui cantitate este exprimată prin numărul de kilomoli ν, iar T este temperatura absolută, s-a dedus experimental că legea gazului perfect poate fi formulată astfel

$$pv = \nu RT \tag{10.1}$$

unde R este o constantă, numită constanta gazului perfect sau, pe scurt, constanta gazelor. Este important de subliniat că această lege se extrage din experimente și anume prin măsurarea parametrilor p, v și T pentru o aceeași cantitate de gaz; se constată că la orice variație a acestora mărimea $p.v/T$ rămîne constantă. Din legea (10.1) se observă că această mărime este egală cu produsul νR care rămîne constant. Constanta R se determină experimental prin măsurarea presiunii și a volumului unui kilomol de gaz perfect la o anumită temperatură T și se obține

$$R = 8\,310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$$

Prin urmare, produsul între presiunea și volumul unui gaz este proporțional cu cantitatea de gaz și cu temperatura absolută, constanta de proporționalitate fiind R. Se observă că legea gazului perfect este independentă de natura gazului, deoarece nu conține nici o mărime care să caracterizeze natura gazului.

Legea gazului perfect permite obținerea unui parametru din cei trei parametri (p, v și T), dacă se cunosc ceilalți doi și cantitatea de gaz; de asemenea se poate calcula cantitatea de gaz dacă se cunosc cei trei parametri ai gazului. Un gaz poate suferi o transformare în care unul din parametri să rămînă constant. Din legea gazului perfect se pot deduce relațiile pentru aceste transformări; aceste cazuri particulare ale legii gazului perfect sînt foarte importante în studiul gazelor, ele sînt: teorema lui Avogadro, teorema Boyle-Mariotte, teorema lui Charles și teorema lui Gay-Lussac.

Teorema lui Avogadro se referă la volumul ocupat de un kilomol de gaz perfect. Introducînd în relația (10.1) volumul unui kilomol V, definit prin relația $V \equiv v/\nu$, legea gazului perfect se va scrie

$$V = \frac{v}{\nu} = \frac{RT}{p}$$

În condiții normale, adică pentru $p_{atm} = 1{,}01 \cdot 10^5$ N/m^2 și $T = 273$ K, rezultă volumul unui kilomol egal cu $V = 22{,}4$ m^3. Prin urmare, *volumul unui kilomol* de gaz este același pentru orice gaz care se comportă ca gazul perfect *în aceleași condiții de temperatură și presiune, independent de natura sa.*

În § 2.7 s-a văzut că un kilomol din orice substanță are același număr de molecule. Prin urmare, egalitatea volumelor pentru un kilomol din orice gaz constituie o altă exprimare a egalității numărului de molecule dintr-un kilomol din orice gaz.

Cu ajutorul volumului unui kilomol legea gazului perfect se poate scrie

$$pV = RT \tag{10.2}$$

Teorema Boyle-Mariotte se referă la o transformare a gazului în care temperatura rămîne constantă (transformare izotermă). Pentru acest caz legea gazului perfect se scrie

$$pv = \text{const.} \tag{10.3}$$

Constanta include atît temperatura cît și cantitatea de gaz. Rezultă că pentru o anumită cantitate de gaz *produsul între presiunea și volumul acelei cantități de gaz rămîne constant, dacă temperatura gazului nu se modifică.*

De exemplu, pentru o transformare izotermă a unui gaz de la starea caracterizată prin presiunea p și volumul v, la starea caracterizată prin presiunea p' și volumul v' se poate scrie relația (10.3) sub forma

$$pv = p'v'$$

Cu alte cuvinte, într-o transformare izotermă presiunea variază invers proporțional cu volumul.

Teorema lui Charles se referă la transformarea unui gaz în care volumul gazului rămîne constant (transformare izocoră). Ea exprimă variația presiunii unui gaz în funcție de temperatură într-o transformare la volum constant. Dacă se scrie relația (10.1) astfel încît parametrii variabili (p și T) să fie în membrul întîi iar mărimile constante, inclusiv volumul, să fie în membrul al doilea se obține

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \tag{10.4}$$

Într-o transformare izocoră presiunea gazului crește proporțional cu temperatura absolută. Dacă gazul se încălzește de la temperatura T la temperatura T', presiunea crește de la p la p', astfel încît relația (10.4) se scrie

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'}; \qquad \frac{p'}{p} = \frac{T'}{T}$$

Dacă în această relație se folosește temperatura Celsius t, $T = 273 + t$, se ajunge la o formă bine cunoscută. Presupunînd transformarea de la temperatura 0°C, $T_0 = 273$ K, unde presiunea gazului este p_0, pînă la temperatura t', $T' = (273 + t')$ K, unde presiunea este p' se obține

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{273 + t'}{273}$$

$$p' = p_0\left(1 + \frac{t'}{273}\right) = p_0\,(1 + \beta \cdot t')$$

unde $\beta = 1/273$ este *coeficientul de creștere a presiunii gazelor la volum constant.*

Teorema lui Gay-Lussac se referă la transformarea unui gaz în care presiunea rămîne constantă (transformare izobară). Această teoremă exprimă variaţia volumului unui gaz în funcţie de temperatura absolută într-o transformare la presiune constantă. Dacă se scrie relaţia (10.1) astfel încît parametrii variabili (v şi T) să fie în membrul întîi, iar mărimile constante, inclusiv presiunea, să fie în membrul al doilea se obţine

$$\frac{v}{T} = \text{const} \tag{10.5}$$

Într-o transformare izobară volumul gazului creşte proporţional cu temperatura absolută. Dacă gazul se încălzeşte de la temperatura T la temperatura T', volumul creşte de la v la v', astfel încît relaţia (10.5) se scrie

$$\frac{v}{T} = \frac{v'}{T'}; \qquad \frac{v'}{v} = \frac{T'}{T}$$

Dacă în această relaţie se foloseşte temperatura Celsius t, $T = 273 + t$, se ajunge la o formă bine cunoscută. Presupunînd transformarea de la temperatura 0°C, $T_0 = 273$ K, unde volumul gazului este v_0, pînă la temperatura t', $T' = (273 + t')$ K, unde volumul gazului este v' se obţine

$$\frac{v'}{v_0} = \frac{273 + t'}{273}$$

$$v' = v_0\left(1 + \frac{t'}{273}\right) = v_0\,(1 + \alpha t')$$

unde $\alpha = 1/273$ este *coeficientul de dilatare al gazelor sub presiune constantă.*

Din ultimele două teoreme rezultă că coeficientul de dilatare al gazelor sub presiune constantă este egal cu coeficientul de creştere a presiunii gazelor la volum constant

$$\alpha = \beta$$

Cei doi coeficienţi au aceeaşi valoare, 1/273, pentru orice gaz perfect.

Notă.

În cele ce urmează se va folosi legea gazului perfect scrisă cu ajutorul constantei lui Boltzmann k, definită prin relaţia

$$k = \frac{R}{\mathfrak{N}} = 1{,}38\ 10^{-23}\ \text{J/K}$$

unde $\mathfrak{N}$ este constanta lui Avogadro. Ca urmare, legea gazului perfect se scrie

$$pv = NkT \tag{10.6}$$

unde $N = \nu \cdot \mathfrak{N}$ este numărul total de molecule conţinute în volumul v al gazului.

10.2. Teoria cinetică a gazelor

Ipotezele care stau la baza teoriei cinetice a gazelor sînt:

a) Un gaz perfect este format din molecule care *se ciocnesc elastic* (energia cinetică se conservă) atît între ele cît şi de peretele recipientului care conţine gazul.

b) Moleculele gazului perfect sînt depărtate unele de altele la distanţe suficient de mari, cea mai mare parte a timpului, astfel încît nu se exercită nici o forţă între ele, cu excepţia acelora care apar la ciocniri. Ca urmare, moleculele gazului perfect *au energie cinetică* şi nu au energie potenţială.

c) Dimensiunile moleculelor sînt foarte mici faţă de distanţele dintre molecule, ceea ce înseamnă că moleculele sînt presupuse punctiforme. Fiind punctiforme moleculele nu pot avea mişcare de rotaţie ci numai *mişcare de translaţie*. Ca urmare energia cinetică a moleculelor este numai de translaţie; moleculele gazului nu au energie cinetică de rotaţie.

d) Distribuţia vitezelor moleculelor gazului la echilibru nu se schimbă în timp. Aceasta înseamnă că numărul moleculelor care au o anumită valoare a vitezei este totdeauna acelaşi deşi în timp moleculele care au această viteză pot fi altele. Cu alte cuvinte, se poate spune că, în medie, numărul moleculelor care au o anumită viteză iniţială v_1 şi care emerg după ciocnire, de exemplu cu o viteză v_2 mai mare ($v_2 > v_1$), este egal cu numărul moleculelor care au avut iniţial viteza v_2 şi care s-a micşorat prin ciocnire la viteza v_1. Avînd de-a face în mişcare cu un număr mare de particule identice, nu se poate urmări mişcarea fiecărei particule. Datorită numărului mare de particule, pentru stabilirea „comportării medii" a tuturor particulelor se foloseşte *metoda statistică*.

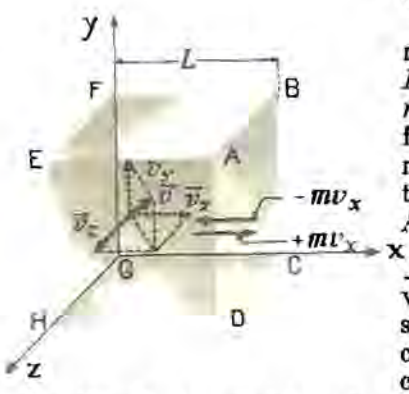


Fig. 10.1. Pentru calculul presiunii gazului, pe un recipient de formă cubică, cu latura L, se descompune viteza unei molecule după cele trei axe de coordonate

Se consideră un gaz perfect format din N molecule identice, fiecare de masă m, gazul fiind conţinut într-un recipient de formă cubică cu latura L şi de volum $v = L^3$ (fig. 10.1). În unitatea de volum vor fi n molecule, $n = N/v$. La ciocnirea unei molecule a gazului de unul din pereţi se exercită o forţă asupra peretelui. Rezultatul tuturor acestor forţe care acţionează continuu în timp, datorită numărului mare de ciocniri în unitatea de timp, asupra tuturor pereţilor recipientului este presiunea uniformă pe pereţii acestuia. Această presiune se numeşte *presiunea gazului*.

Pentru calculul presiunii gazului este necesar să se descompună viteza $\vec{v}$ a unei molecule la un timp dat în componentele sale v_x, v_y, v_z, aşa cum se arată în figura 10.1. O moleculă care ciocneşte peretele ABCD va avea componenta impulsului după axa Ox, mv_x înainte de ciocnire şi $-mv_x$ după ciocnire; ca urmare, variaţia impulsului la ciocnirea unei molecule este $\Delta px = -2\,mv_x$. Ştiind că forţa este egală cu derivata impulsului în raport cu timpul, se poate calcula forţa medie care acţionează la ciocnirea unei molecule cu peretele ABCD perpendicular pe Ox; această forţă se calculează din variaţia impulsului raportată la timpul Δt cît durează ciocnirea şi are expresia, în valoare absolută,

$$f = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t}$$

Forţa totală F exercitată asupra peretelui $ABCD$ şi care se datoreşte tuturor moleculelor care au o componentă v_x a vitezei şi ciocnesc acelaşi perete în acelaşi timp, adică în intervalul de timp Δt (cît molecula stă în contact cu peretele), va fi

$$F = \sum f = \sum \frac{2mv_x}{\Delta t}$$

Trebuie să se ţină seama că nu toate cele n molecule din unitatea de volum au aceeaşi componentă a vitezei pe axa Ox. Un număr n_1 din ele au componenta v_{x_1}, un alt număr v_2 au altă componentă, v_{x_2}, şi aşa mai departe. Numărul total de molecule din unitatea de volum, n, este evident,

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_i$$

Suma din expresia forţei se efectuează pentru numărul de molecule care ciocnesc peretele în timpul Δt; acest număr este dat de numărul moleculelor care se găsesc în faţa peretelui, într-un volum determinat de aria peretelui şi care are ca înălţime produsul $v_x \cdot \Delta t$ (fig. 10.2). Aceste molecule se mişcă haotic şi, ca urmare, jumătate din ele au $v_x > 0$, iar jumătatea $v_x < 0$, aşa cum se arată în continuare la distribuţia vitezelor moleculare (§ 10.5). Dacă în unitatea de volum sînt n_i molecule, atunci $n_i/2$ vor avea $v_{x_i} > 0$ şi deci numărul moleculelor care vor ciocni peretele ABCD în timpul Δt este

$$\frac{n_i}{2} A \cdot v_{x_i} \cdot \Delta t$$

Expresia forţei va fi

$$F = \Sigma f = \Sigma f(v_{x_1}) + \Sigma f(v_{x_2}) + \ldots + \Sigma f(v_{x_i})$$

$$= \ldots + \frac{n_i}{2} A v_{x_i} \Delta t \frac{2mv_{x_i}}{\Delta t}$$

$$= n_1 Amv_{x_1}^2 + n_2 Amv_{x_2}^2 + \ldots + n_i Amv_{x_i}^2$$

$$F = Am(n_1 v_{x_1}^2 + n_2 v_{x_2}^2 + \ldots + n_i v_{x_i}^2)$$

Definind media pătratului componentei v_x prin relaţia

$$\overline{v_x^2} = \frac{n_1 v_{x_1}^2 + n_2 v_{x_2}^2 + \ldots + n_i v_{x_i}^2}{n} \qquad (10.7)$$

expresia forţei asupra peretelui considerat are forma

$$F = nAm\overline{v_x^2} = \frac{N}{v} \cdot Am\overline{v_x^2}$$

unde $N = n \cdot v$ este numărul total de molecule din recipient, v fiind volumul recipientului. Introducînd presiunea $p = F/A$, rezultă

$$p = \frac{N}{v} m\overline{v_x^2}$$

$$pv = Nm\overline{v_x^2}$$

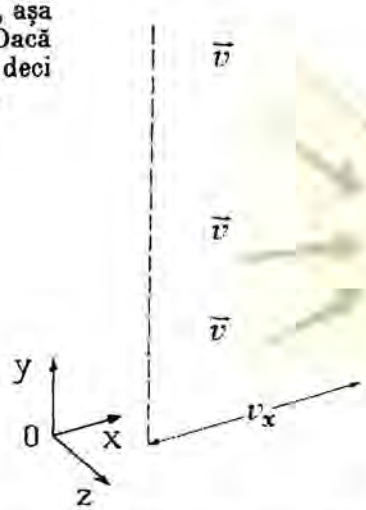


Fig. 10.2. Pentru calculul numărului moleculelor care ciocnesc un anumit perete contează componenta normală la perete a vitezei moleculelor, adică componenta v_x, peretele fiind ales în planul yOz

Expresia obținută dă presiunea pe peretele $ABCD$; o expresie asemănătoare, pentru $v_x < 0$, va da presiunea pe peretele opus, $EFGH$. Prin raționamente analoge se obține presiunea pe pereții $ABFE$ și $CDHG$

$$pv = Nm\overline{v_y^2}$$

și presiunea pe pereții $ADHE$ și $BCGF$

$$pv = Nm\overline{v_z^2}$$

Prin urmare, presiunea gazului poate fi exprimată atît în funcție de v_x cît și de v_y sau de v_z.

În calculul făcut s-au considerat numai ciocnirile dintre moleculele gazului și pereții recipientului; însă calculul nu se modifică dacă, pe lîngă ciocnirile moleculelor cu pereții, se vor lua în considerație și ciocnirile moleculelor între ele. Aceasta se datorește celei de a patra ipoteze care stau la baza teoriei cinetice a gazelor: distribuția vitezelor nu se schimbă în timp, chiar dacă au loc schimbări ale vitezelor individuale ale moleculelor ca urmare a ciocnirilor dintre molecule. Oricît de multe ciocniri intermoleculare s-ar produce, ansamblul mișcării tuturor moleculelor, în ceea ce privește distribuția vitezelor lor, rămîne neschimbat.

Direcțiile de mișcare ale moleculelor sînt oricare, adică întîmplătoare, cu alte cuvinte cele trei direcții sînt la fel de probabile și deci

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Deoarece modulul vitezei moleculelor are expresia

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

și datorită egalității de mai sus rezultă

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\,\overline{v^2} \tag{10.8}$$

Se observă că media pătratului fiecărei componente a vitezei, respectiv pe axele x, y și z, este egală cu o treime din media pătratului vitezei v a moleculelor. Cu aceasta, oricare din cele trei expresii ale presiunii, date mai înainte, capătă forma

$$pv = \frac{N}{3}\,m\overline{v^2}$$

Deoarece $\frac{1}{2}\,m\overline{v^2}$ este energia cinetică medie a moleculelor numită energia cinetică moleculară E, expresia de mai sus devine

$$pv = \frac{2}{3}\,N\,\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{2}{3}\,NE \tag{10.9}$$

Produsul între energia cinetică moleculară E și numărul total al moleculelor N reprezintă energia cinetică totală a gazului. Deoarece moleculele gazului

perfect nu au energie potențială ci numai energie cinetică, energia cinetică totală *NE* reprezintă chiar energia internă totală a gazului perfect numită pe scurt *energia internă*. Întrucît moleculele gazului perfect sînt presupuse punctiforme, ele nu au energie cinetică de rotație și deci energia internă a gazului perfect conține numai *energia cinetică moleculară de translație*.

În concluzie, pentru gazul perfect produsul între presiunea gazului și volumul recipientului care îl conține este egal cu două treimi din energia internă a gazului.

10.3. Energia cinetică moleculară

Relația (10.9), comparată cu ecuația care exprimă legea gazului perfect sub forma (10.6), conduce la egalitatea

$$\frac{2}{3} NE = NkT \tag{10.10}$$

$$E = \frac{3}{2} kT$$

Energia cinetică moleculară a unui gaz este proporțională cu temperatura sa absolută. Relația (10.10) nu conține nici o mărime care să depindă de natura gazului.

Relația (10.10) permite interpretarea temperaturii zero absolut și anume temperatura la care energia cinetică moleculară se anulează, adică temperatura la care mișcarea de translație a moleculelor încetează.

Trebuie subliniat faptul că teoria cinetică a gazelor conduce la expresia (10.9) în perfectă concordanță cu legea gazului perfect. Dar nu trebuie pierdut din vedere că legea gazului perfect este numai o aproximație a realității. Dacă se examinează ipotezele de bază ale teoriei cinetice a gazelor, se poate ușor vedea de ce apar diferențe între teorie și faptele experimentale. De exemplu, s-a presupus că moleculele punctiforme sînt suficient de depărtate una de alta încît nu se exercită alte forțe între ele cu excepția forțelor care apar la ciocnirile cu pereții și a ciocnirilor între molecule; cu alte cuvinte, moleculele gazului perfect nu au energie potențială și nici energie cinetică de rotație sau de vibrație. Conform ipotezelor de bază ale teoriei cinetice moleculele gazului perfect ar avea numai energie cinetică de translație. *În realitate moleculele gazului nu sînt punctiforme și distanțele nu sînt atît de mari încît forțele intermoleculare să poată fi considerate neglijabile.* Dacă teoria cinetică ar porni de la ipoteze mai apropiate de realitate, rezultatele calculelor ar diferi mai puțin de datele furnizate de verificarea experimentală.

De exemplu, la un gaz format din molecule biatomice, la ciocnirea unei molecule cu peretele recipientului sau cu altă moleculă, molecula biatomică poate începe să se rotească; rotația moleculei absorbe o parte din energia internă a gazului ca energie de rotație. Energia cinetică de translație va fi mai mică și deci relația de bază a teoriei cinetice nu se mai aplică.

Principiul echipartiției energiei. O moleculă formată dintr-un singur atom (moleculă monoatomică) are în interiorul unui gaz trei direcții de mișcare independente, deoarece ea se poate mișca oricum după direcțiile x, y

și z; rezultă deci că această moleculă are trei grade de libertate. O moleculă care nu se poate mișca, de exemplu, decît pe axa x, are un singur grad de libertate, iar o moleculă fixată într-o rețea cristalină, unde nu se poate mișca de loc, nu are nici un grad de libertate. Moleculele gazului se mișcă *la întîmplare*, adică *cu egală probabilitate pe toate cele trei direcții*. Aceasta este cauza faptului că presiunea gazului este aceeași pe toți pereții recipientului, adică după toate din cele trei direcții x, y și z. Ca urmare, cele trei grade de libertate își împart în mod egal energia cinetică moleculară, egală cu $\frac{3}{2}kT$. Astfel se poate asocia fiecăruia din gradele de libertate ale mișcării de translație a unei molecule de gaz monoatomic o fracțiune din energia cinetică moleculară, fracțiune egală cu $\frac{1}{2}kT$. Cele trei fracțiuni se notează:

$$E_x = \frac{1}{2}kT; \quad E_y = \frac{1}{2}kT; \quad E_z = \frac{1}{2}kT \tag{10.11}$$

Principiul echipartiției energiei, foarte important pentru mecanica statistică, este generalizarea rezultatului obținut pentru un număr de grade de libertate mai mare decît trei. Conform acestui principiu, într-un ansamblu de molecule *aceeași cantitate de energie, și anume* $\frac{1}{2}kT$, *este asociată fiecărui grad de libertate*. Cu alte cuvinte, fiecare grad de libertate al unei molecule este pentru moleculă un mod de a poseda energie. Molecula biatomică are cinci grade de libertate, trei de translație și două de rotație; cele două grade de libertate pentru mișcarea de rotație corespund faptului că mișcările de rotație în jurul celor două axe arătate în figura 10.3 corespund axelor pentru care momentul de inerție diferă de zero. Conform principiului echipartiției energiei fiecăruia din cele cinci grade de libertate i se asociază o energie medie de $\frac{1}{2}kT$, ceea ce înseamnă că întreaga moleculă are o energie totală de $\frac{5}{2}kT$. Un gaz care are N molecule biatomice va avea energia internă totală $\frac{5}{2}NkT$.

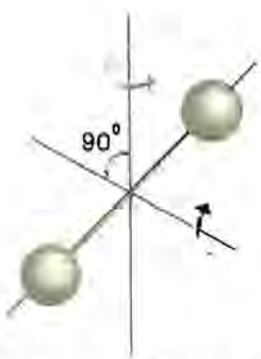


Fig. 10.3. Molecula biatomică are momente de inerție nenule față de cele două axe și nul față de axa moleculei, deoarece atomii sînt punctiformi față de distanța dintre ei.

10.4. Distribuția moleculelor în atmosferă

În atmosfera Pămîntului ca și a oricărei alte planete moleculele se mișcă nu numai datorită agitației termice dar și sub acțiunea gravitației. Mișcarea moleculelor din atmosferă se datorește și altor cauze; de exemplu, variațiile de presiune produc vînturile. În plus mișcarea datorită agitației termice este mai complicată deoarece atmosfera Pămîntului nu este în echilibru termic: pe măsură ce altitudinea crește temperatura este mai coborîtă.

Pentru cele ce urmează se presupune o *atmosferă ideală* lipsită de vînturi și curenți și în echilibru termic; temperatura este aceeași de la suprafața solu-

lui pînă la cele mai mari înălțimi la care se mai întîlnesc moleculele de gaz atmosferic. În atmosfera ideală cauzele mișcării moleculelor de gaz sînt: agitația termică și gravitația. Studiul mișcării moleculelor într-o astfel de atmosferă prezintă un interes foarte mare pentru mecanica statistică; acest studiu conduce la stabilirea legii lui Boltzmann.

Dacă $n = N/v$ este numărul moleculelor din unitatea de volum, N fiind numărul total de molecule din volumul v de gaz la presiunea p, legea gazului perfect dată de relația (10.6) se poate scrie

$$p = nkT \tag{10.12}$$

Se observă că la o temperatură T a gazului, presiunea este proporțională cu numărul de molecule din unitatea de volum, factorul de proporționalitate fiind constanta lui Boltzmann. Cunoscînd numărul de molecule din unitatea de volum se poate determina presiunea la temperatura T din relația (10.12), fără să fie necesară măsurarea sa printr-o metodă dinamică.

Dacă de-a lungul unei coloane înalte de atmosferă temperatura este aceeași, presiunea este aceeași? Nu, deoarece presiunea la o anumită altitudine se datorește coloanei de gaz de deasupra poziției considerate. Pe o suprafață de arie A la o poziție oarecare, apasă coloana de gaz atmosferic delimitată de suprafața de arie A și de limita exterioară a atmosferei, pe lîngă ciocnirile moleculelor din vecinătatea suprafeței. Pe măsură ce altitudinea crește coloana de gaz de deasupra este mai mică, deci și presiunea este mai mică. Există deci o variație a presiunii cu altitudinea și deci, conform relației (10.12), o variație a numărului de molecule din unitatea de volum cu altitudinea.

Fie două suprafețe, fiecare de arie egală cu unitatea, paralele între ele și așezate una la altitudinea h și cealaltă la $h + \mathrm{d}h$(fig. 10.4). Asupra acestor suprafețe se exercită presiunea gazului atmosferic. În absența gravitației presiunea gazului ar fi aceeași pe ambele suprafețe, aflate la altitudinile h și respectiv $h + \mathrm{d}h$. Din cauza gravitației, presiunea p_h exercitată pe suprafața de la altitudinea h este mai mare decît presiunea $p_{h+\mathrm{d}h}$ exercitată pe suprafața de la altitudinea $h + \mathrm{d}h$ ($p_h > p_{h+\mathrm{d}h}$). Diferența dintre cele două presiuni este tocmai egală cu greutatea gazului cuprins între cele două suprafețe cu aria egală cu unitatea. Dacă n este numărul de molecule din unitatea de volum, numărul elementar de molecule $\mathrm{d}n$, aflat în volumul de gaz delimitat de cele două suprafețe cu aria unitară, distanțate cu $\mathrm{d}h$,va fi $n\,\mathrm{d}h$. Greutatea acestor molecule este $mgn\,\mathrm{d}h$, m fiind masa unei molecule, iar g accelerația gravitației. Din diferența celor două presiuni se obține ecuația diferențială $p_{h+\mathrm{d}h} - p_h = -\mathrm{d}p = mgn\,\mathrm{d}h$. Semnul minus ilustrează faptul că presiunea crește cînd altitudinea descrește. Diferențiala $\mathrm{d}p$ se obține din relația (10.12), T fiind considerat constant, $\mathrm{d}p = kT\,\mathrm{d}n$ și deci ecuația diferențială $-\mathrm{d}p = mgn\,\mathrm{d}h$ devine

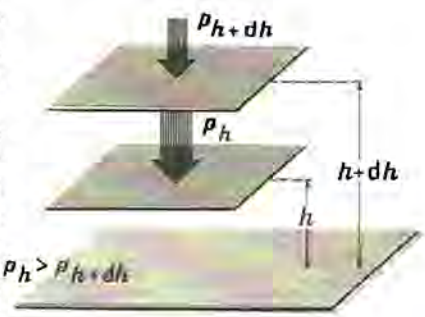


Fig. 10.4 Presiunea gazului pe o suprafață la altitudine mai mică este mai mare decît aceea pe o suprafață la altitudine mai mare cu greutatea gazului cuprins între cele două suprafețe

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}h} = -\frac{mg}{kT}n; \quad \frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{mg}{kT}\mathrm{d}h$$

Prin integrare se obține

$$\ln n = -\frac{mg}{kT}h + const$$

Pentru determinarea constantei se scrie că la $h = 0$, densitatea moleculelor este n_0 şi deci relaţia de mai sus devine în acest caz

$$\ln n_0 = const$$

Ca urmare

$$\ln n = -\frac{mg}{kT}h + \ln n_0$$

$$\ln n - \ln n_0 = -\frac{mg}{kT}h$$

$$\ln \frac{n}{n_0} = -\frac{mg}{kT}h$$

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{mg}{kT}h}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{mg}{kT}h} \tag{10.13}$$

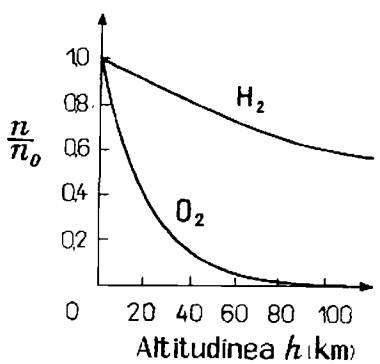


Fig. 10.5. Dependenţa de altitudinea h a raportului n/n_0 pentru moleculele de hidrogen (H_2) şi de oxigen (O_2). n este numărul de molecule din unitatea de volum la altitudinea h iar n_0 este numărul de molecule din unitatea de volum la $h = 0$

unde n_0 este numărul moleculelor din unitatea de volum la altitudinea $h = 0$.

Dacă există mai multe tipuri de molecule, de mase diferite, distribuţia lor cu altitudinea va fi exponenţială, dar cu exponenţii diferiţi. Numărul moleculelor mai masive, deci mai grele, va descreşte mai repede cu altitudinea decît numărul moleculelor mai puţin masive. Astfel, întrucît oxigenul este mai masiv, şi deci mai greu decît azotul, ar trebui ca la altitudinile joase să se găsească relativ mai mult oxigen iar la altitudini din ce în ce mai mari să se găsească din ce în ce mai mult azot, comparativ cu densitatea moleculelor de azot la $h = 0$. Acest fapt nu are loc în realitate în atmosfera Pămîntului, din cauza curenţilor de aer foarte puternici care amestecă continuu masele de aer; atmosfera Pămîntului nu este un mediu izoterm. Totuşi la o diferenţă mare de masă există efectul separării moleculelor cu altitudinea; astfel la altitudini foarte mari predomină hidrogenul. În figura 10.5 se arată variaţia cu altitudinea a densităţii moleculelor în cîmpul gravitaţional al Pămîntului, pentru hidrogen şi oxigen temperatura fiind considerată constantă.

Relaţia (10.13) are multe consecinţe. Se observă că în absenţa cîmpului gravitaţional, deci pentru $g = 0$, se obţine $n = n_0$, ceea ce înseamnă o distribuţie uniformă a moleculelor cu altitudinea, cu alte cuvinte, în acest caz numărul de molecule din unitatea de volum, n, nu depinde de altitudinea h. Dacă nu ar exista agitaţia termică, adică pentru $T = 0$, rezultă $n = 0$ pentru orice valoare a altitudinii h diferită de zero. În acest caz ($T = 0$) pentru $h = 0$, apare o nedeterminare, care înlăturată conduce la $n = n_0$. Prin urmare, în lipsa mişcării termice moleculele, independent de masa lor, s-ar afla toate la altitudinea $h = 0$, adică lipite de sol. Din aceste consideraţii rezultă că distribuţia moleculelor în atmosferă, exprimată de relaţia (10.13), este un „compromis" între mişcarea termică care tinde să distribuie moleculele uniform în tot spaţiul atmosferei şi acţiunea gravitaţiei care tinde să concentreze moleculele la suprafaţa solului.

10.5. Legea lui Boltzmann

Relaţia (10.13) conţine la numărătorul exponentului mărimea mgh, care este tocmai energia potenţială a unei molecule în cîmpul g. Prin urmare, distribuţia moleculelor de gaz în cîmpul gravitaţional este proporţională cu

$$e^{-\frac{\text{energia potenţială a moleculei}}{kT}}$$

Această proprietate a distribuţiei moleculelor este adevărată pentru orice tip de cîmp, nu numai pentru cîmpul gravitaţional. Astfel dacă moleculele sînt încărcate electric şi se găsesc într-un cîmp electric exterior, distribuţia lor spaţială este proporţională cu

$$e^{-\frac{W}{kT}}$$

unde W este energia potenţială a unei molecule în cîmpul electric. De exemplu, dacă într-un lichid se găseşte un ion pozitiv şi în jurul său se află ioni negativi, se poate pune întrebarea cîţi ioni negativi se găsesc la diferite distanţe de ionul pozitiv? Dacă se cunoaşte energia potenţială în funcţie de distanţă se poate obţine distribuţia spaţială a ionilor negativi în jurul ionului pozitiv.

Generalizînd relaţia (10.13) se ajunge la legea lui Boltzmann, care este principiul de bază al mecanicii statistice. O problemă importantă a mecanicii statistice este aceea de a găsi distribuţia spaţială a unor particule într-un anumit corp. Distribuţia spaţială se descrie cu ajutorul probabilităţii de prezenţă a moleculelor sau atomilor într-un anumit aranjament spaţial. Probabilitatea de prezenţă a particulelor se exprimă prin numărul de particule pe unitatea de volum întrucît probabilitatea de prezenţă a particulelor într-o anumită poziţie este cu atît mai mare cu cît numărul particulelor în unitatea de volum în acea poziţie este mai mare.

Legea lui Boltzmann afirmă că numărul de particule în unitatea de volum este proporţional cu o exponenţială al cărei exponent conţine la numărător energia W a particulei în aranjamentul spaţial studiat, cu semnul minus, şi kT la numitor

$$n = const \cdot e^{-\frac{W}{kT}} \tag{10.14}$$

Două exemple vor preciza mai bine cazurile în care se aplică legea lui Boltzmann. Primul exemplu se referă la *evaporarea unui lichid.* Prin evaporare, la temperatura T, moleculele lichidului părăsesc starea lichidă şi trec în starea gazoasă. În stare gazoasă moleculele sînt depărtate unele de altele astfel încît, în primă aproximaţie, se pot neglija forţele dintre ele. În starea lichidă moleculele sînt foarte apropiate datorită forţelor de atracţie dintre ele. Aceasta înseamnă că moleculele lichidului posedă o energie de legătură, energie care se pierde atunci cînd moleculele trec în starea gazoasă. Cu alte cuvinte, pentru ca o moleculă să treacă din starea lichidă în starea gazoasă, este necesar să se cheltuiască un lucru egal cu energia de legătură Φ a moleculei respective în lichid. Trecerea moleculei de la faza lichidă la faza gazoasă

este echivalentă cu „ruperea" moleculei din sistemul lichid în care ea este legată de celelalte molecule prin intermediul forţelor intermoleculare. Se poate considera deci că o moleculă a lichidului are, faţă de energia sa în gaz, o energie suplimentară Φ — energia de legătură a moleculei în lichid.

Dacă n este numărul moleculelor în unitatea de volum din starea lichidă şi n' este numărul moleculelor în unitatea de volum din starea gazoasă, legea lui Boltzmann se scrie

$$\frac{n}{n'} = e^{-\frac{\Phi}{kT}} \tag{10.15}$$

unde Φ este energia suplimentară pe care molecula o are în starea lichidă faţă de starea gazoasă. Relaţia (10.15) arată distribuţia moleculelor între gaz şi lichid la o temperatură T dată.

Al doilea exemplu se referă la *emisiunea termoelectronică*, care constă în faptul că un metal adus la incandescenţă eliberează electroni. Dacă metalul încălzit este filamentul unui tub electronic, atunci electronii eliberaţi sînt atraşi de electrodul încărcat pozitiv. Fenomenul de emisiune termoelectronică are loc chiar şi în absenţa unui cîmp electric exterior. Energia termică a metalului măreşte mişcarea de agitaţie termică a electronilor „liberi" din reţeaua cristalină şi electronii pot trece prin suprafaţa metalului spre exterior. Fenomenul este analog evaporării unui lichid; electronii cu o anumită energie părăsesc metalul, după cum moleculele cu o anumită energie părăsesc lichidul. Electronii liberi sînt menţinuţi în metal datorită unor forţe electrostatice. Prin faptul că un electron părăseşte metalul, un atom din metal rămîne cu un electron mai puţin, apare astfel un ion pozitiv. Ca urmare electronii din vecinătatea metalului incandescent sînt atraşi de forţele electrice spre metal. Cu alte cuvinte, electronul care părăseşte metalul, străbate diferenţa de potenţial φ la suprafaţa metalului, adică prin încălzire, datorită agitaţiei termice, asupra electronului s-a executat împotriva forţelor electrostatice lucrul $q_e\varphi$, q_e fiind sarcina electronului. În interiorul metalului electronul este caracterizat prin energia $q_e\varphi$ şi deci legea lui Boltzmann se poate scrie

$$\frac{n}{n'} = e^{-\frac{q_e\varphi}{kT}} \tag{10.16}$$

unde n este numărul electronilor liberi din unitatea de volum a metalului şi n' este numărul electronilor din unitatea de volum în norul electronic din jurul metalului incandescent.

Legea lui Boltzmann exprimă proprietatea unui *echilibru statistic*. În atmosfera care se găseşte în stare de echilibru într-un cîmp gravitaţional există un echilibru între mişcarea produsă de agitaţia termică şi aceea datorită cîmpului gravitaţional. La un timp dat, la altitudinea h, numărul moleculelor care trec spre altitudini mai mari este egal cu numărul moleculelor care coboară spre altitudini mai mici. Numerele n şi n_0 din relaţia (10.13) nu reprezintă numărul unor molecule care stau permanent la altitudinile h şi $h = 0$, ci numărul moleculelor care se găsesc momentan la altitudinile respective. De asemenea, în cazul evaporării unui lichid, la un timp dat, numărul moleculelor care trec din lichid în gaz este egal cu numărul moleculelor care trec din gaz în lichid. Şi în fine, în cazul emisiunii termoelectronice, la o anumită

temperatură a metalului, numărul electronilor care părăsesc metalul este egal cu al acelora care se întorc în metal, evident, în unitatea de timp. În relația (10.16) valorile lui n și n', care reprezintă numărul electronilor din unitatea de volum, din metal și respectiv din norul electronic sînt valori instantanee.

Considerațiile făcute se referă prin urmare la un echilibru statistic și înțelegerea acestui tip de echilibru este esențială pentru abordarea problemelor pe care le studiază mecanica statistică.

10.6. Distribuția vitezelor moleculare

Distribuția moleculelor de gaz în atmosferă, studiată în § 10.4 arată că gazul atmosferic este mai dens la altitudinile mici decît la cele mari, deoarece este necesar lucrul mgh pentru ridicarea unei molecule de masă m la înălțimea h. Acest lucru este efectuat pe seama agitației termice. Este important de subliniat faptul că nu toate moleculele de la altitudinea $h = 0$ ajung la altitudinea h, ceea ce înseamnă că nu toate moleculele au la $h = 0$ aceeași viteză, sau mai precis, nu toate moleculele care se mișcă pe verticală au aceeași viteză. Chiar la echilibru termic moleculele din gazul atmosferic ca și acelea din orice gaz au diferite viteze; se spune că există *o distribuție a vitezelor moleculelor*. În paragraful de față se va deduce distribuția vitezelor moleculelor într-un gaz, generalizînd rezultatul obținut pentru gazul atmosferic, presupunînd în primul rînd mișcarea moleculelor numai pe verticală și apoi trecînd la mișcarea moleculelor în toate direcțiile.

Pentru ca o moleculă din gazul atmosferic să ajungă la altitudinea h. trebuie ca ea să aibă la altitudinea $h = 0$ energia cinetică egală cu energia potențială corespunzătoare altitudinii h

$$\frac{1}{2} mu^2 = mgh \qquad (10.17)$$

unde u este viteza pe verticală a moleculei respective. Deoarece pe măsură ce h crește densitatea moleculelor scade, rezultă că la $h = 0$, moleculele au diferite viteze pe verticală: cele cu viteze mari ajung la altitudini mari, pe cînd cele cu viteze mai mici rămîn la altitudini mai mici. Vitezele moleculelor datorîndu-se agitației termice și presupunîndu-se atmosfera în echilibru termic, rezultă că la o temperatură constantă T există o distribuție a vitezelor moleculelor din gazul atmosferic.

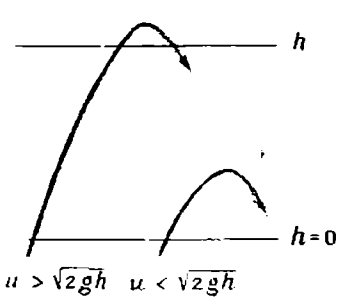


Fig. 10.6. Moleculele care ajung la altitudinea h sînt acelea care au la $h=0$ energia cinetică suficientă pentru a ieși din energia potențială corespunzătoare altitudinii h, ceea ce înseamnă viteza $\sqrt{2gh}$

Pentru cele ce urmează, înălțimea $h = 0$ constituie un nivel arbitrar, în sensul că se presupune că există moleculele de gaz și sub nivelul $h = 0$. Cîte molecule și cu ce viteze trec prin planul orizontal situat la altitudinea $h = 0$? Moleculele care trec în unitatea de timp prin planul $h = 0$ și care au viteza mai mare decît viteza u, dată de relația (10.17), ajung la planul situat la altitudinea h și trec prin acesta, rămînînd totuși cu o viteză diferită de zero (figura 10.6).

Numărul de molecule $n(> 0)$ care trec cu o viteză mai mare de zero prin planul situat la altitudinea h și numărul de molecule $n_0(> 0)$ care trec cu o viteză mai mare decît zero prin planul situat la $h = 0$, sînt în același raport ca și densitățile gazului la cele două altitudini, conform relației (10.13),

$$\frac{n(>0)}{n_0(>0)} = e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Numărul de molecule $n_0(>0)$ reprezintă numărul total de molecule care trec prin planul $h = 0$, deoarece viteza tuturor moleculelor satisface condiția $u > 0$.

Conform considerațiilor făcute mai înainte la discuția relației (10.17), numărul de molecule $n(>0)$ care trec cu o viteză mai mare decît zero prin planul situat la altitudinea h este egal cu numărul de molecule $n_0(>u)$ care trec cu o viteză mai mare decît u prin planul situat la $h = 0$, $n(>0) = n_0(>u)$ și deci expresia de mai sus devine

$$\frac{n_0(>u)}{n_0(>0)} = e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Cu ajutorul relației (10.17) se poate scrie

$$\frac{n_0(>u)}{n_0(>0)} = e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \tag{10.18}$$

Relația (10.18) exprimă raportul dintre numărul moleculelor care trec prin planul situat la $h = 0$, avînd viteza pe verticală mai mare decît u și numărul total de molecule care trec prin același plan; la trecerea prin planul considerat, ambele numere de molecule sînt referite la unitatea de timp și unitatea de arie a suprafeței planului.

Întrucît nivelul $h = 0$ este arbitrar, rezultatul exprimat de relația (10.18) este adevărat pentru orice altitudine, încît se poate scrie

$$\frac{n(>u)}{n(>0)} = e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \tag{10.18'}$$

Prin urmare, fracțiunea moleculelor care trec cu viteza mai mare decît u printr-un plan orizontal situat la altitudinea h este totdeauna egală cu $e^{-mu^2/2kT}$. Această proprietate constituie prima caracteristică a distribuției vitezelor moleculare într-un gaz.

Pentru folosirea distribuției căutate este mai bine ca exprimarea ei să se facă cu ajutorul numărului de molecule care au viteza u, decît cu numărul de molecule care au o viteză mai mare decît u. Deoarece viteza moleculelor variază continuu și nu discret, distribuția vitezelor se exprimă matematic prin fracțiunea numărului de molecule, $f(u) \cdot du$, ale căror viteze variază în intervalul cuprins între u și $u + du$. Cu alte cuvinte, du fiind un element infinitezimal, $f(u) \cdot du$ reprezintă numărul de molecule care au vitezele cu modulele cuprinse într-un domeniu mic de variație, du, situat în jurul valorii u. Semnificația geometrică a mărimii $f(u) \cdot du$ reiese din figura 10.7. Fără a cunoaște încă forma funcției $f(u)$ de variabila u, putem spune că mărimea $f(u) \cdot du$, adică numărul moleculelor cu vitezele cuprinse în intervalul $u \ldots u + du$ reprezintă, în graficul $f(u)$, aria de lărgime du și înălțime medie $f(u)$; această arie este haşurată în figura 10.7. Independent de forma funcției $f(u)$ se mai poate spune că aria totală închisă între curba $f(u)$ și axa absciselor reprezintă numărul total de molecule. Deoarece vitezele tuturor moleculelor

sînt cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$, se poate scrie că aria totală între curba $f(u)$ și axa absciselor este egală cu unitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot du = 1 \tag{10.19}$$

Relația (10.19) afirmă, ca pentru orice curbă de probabilitate, că probabilitatea ca o moleculă să aibă viteza u cuprinsă între $-\infty$ și $+\infty$ este egală cu unitatea.

Pentru a găsi forma funcției $f(u)$, se folosesc considerațiile făcute în acest paragraf, cu precizarea că numărul moleculelor care trec în unitatea de timp

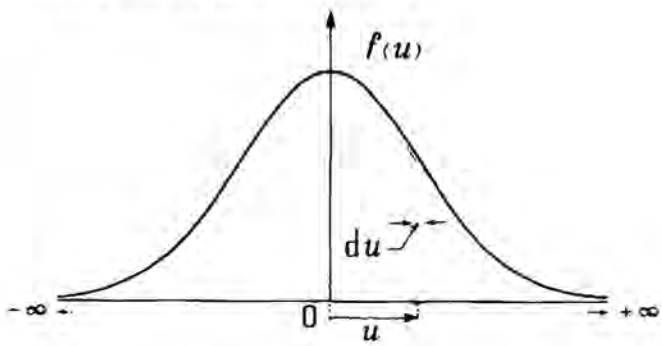


Fig. 10.7 Distribuția vitezelor „verticale" este aceeași cu distribuția vitezelor pe o singură direcție și este o funcție simetrică. Mărimea u variază între $-\infty$ și $+\infty$.

printr-un plan orizontal cu viteza u este egal cu produsul dintre viteza u și numărul de molecule $f(u) \cdot du$

$$u \times f(u) \cdot du$$

Cu alte cuvinte, acest produs reprezintă numărul moleculelor care se deplasează cu vitezele cuprinse în intervalul $u \ldots u + du$ și se găsesc în cilindrul cu lungimea u (fig. 10.8), conform unui raționament analog, care s-a făcut la ciocnirea moleculelor de gaz cu peretele recipientului (v. § 10.2).

Numărul moleculelor, $n(> u)$, care trec printr-un plan orizontal cu viteza mai mare decît u este dat de produsul dintre viteza u (lungimea cilindrului din raționamentul făcut) și numărul moleculelor care au viteza mai mare decît u, reprezentat prin integrala $\int_u^\infty f(u) \cdot du$, și deci

$$n(> u) = \int_u^\infty u \cdot f(u) \cdot du$$

Exprimînd numărul $n(> u)$ cu ajutorul relației (10.18′) se ajunge la expresia

$$\int_u^\infty u \cdot f(u) \cdot du = A \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$

unde constanta A include numărul total de molecule. Prin diferențiere în raport cu u, în membrul din stînga apare semnul minus, deoarece u este limita inferioară

$$-u \cdot f(u) \cdot du = -2u \cdot A \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du$$

$$f(u) = B \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \tag{10.20}$$

Fig. 10.8. Moleculele care ajung la un plan orizontal sînt cele cuprinse în cilindrul cu aria secțiunii transversale egală cu unitatea și lungimea egală cu $u \times t$; în text s-a luat pentru t unitatea de timp

unde $B = 2A$. Relaţia (10.20) reprezintă funcţia de distribuţie căutată, a cărei reprezentare grafică este dată în figura 10.7. Se observă că forma funcţiei $f(u)$ este aceeaşi atît pentru viteze negative cît şi pentru viteze pozitive; semnificaţia fizică a acestei proprietăţi matematice este că trecerea moleculelor printr-un plan orizontal se face în ambele sensuri, atît de sus în jos cît şi de jos în sus. Din figură se observă că viteza cea mai probabilă pentru molecule este viteza nulă; funcţia $f(u)$ este o funcţie simetrică.

Relaţia (10.20) exprimă distribuţia vitezelor moleculelor care se mişcă pe verticală sau, mai precis, *distribuţia vitezelor pe o singură direcţie.* Pentru a stabili distribuţia vitezelor moleculelor care se mişcă în toate direcţiile, se va ţine seama de faptul că viteza unei molecule se descompune pe cele trei axe de coordonate şi că pentru ansamblul unui gaz cele trei direcţii sînt la fel de probabile, aşa cum s-a arătat în § 10.2. Ca urmare ar trebui ca pentru fiecare direcţie de mişcare să existe cîte o funcţie de distribuţie de forma celei date de relaţia (10.20), punînd pătratele componentelor vitezelor pe cele trei axe, v_x^2, v_y^2 şi v_z^2 în locul lui u^2.

Deoarece se ştie că

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

ar însemna ca noua funcţie de distribuţie să depindă de v^2, după cum $f(u)$ depindea de u^2 şi deci se poate scrie

$$f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= B^3 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_x\, dv_y\, dv_z \qquad (10.21)$$

Pentru a găsi valoarea constantei B, se foloseşte expresia demonstrată în Anexa 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Introducînd în relaţia (10.19) expresia lui $f(u) \cdot du$ dată de relaţia (10.20) se obţine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}}\, du = 1$$

Notînd $x^2 = mu^2/2kT$ şi deci $du = \sqrt{2kT/m} \cdot dx$, integrala de mai sus devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B \cdot e^{-x^2} \sqrt{\frac{2kT}{m}}\, dx = 1$$

$$\sqrt{\frac{2kT}{m}}\, B \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 1$$

şi deci cu valoarea integralei dată în Anexa 1, se obţine

$$B = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \qquad (10.22)$$

Urmează să se stabilească forma funcției de distribuție a numărului moleculelor care au o anumită valoare a vitezei; această funcție de distribuție este necesară în aplicații, cum se va arăta în § 10.7. Pentru o specie dată de molecule se consideră că $F(v)dv$ reprezintă numărul mediu al moleculelor din unitatea de volum, care au viteza $v = |\vec{v}|$, cuprinsă în domeniul dintre v și $v + dv$. Acest număr se poate obține prin „adunarea" tuturor moleculelor care au valorile vitezelor cuprinse în acest domeniu, independent de direcțiile vectorilor viteză $\vec{v}$

$$F(v)dv = \int f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z \qquad (10.23)$$

Integrala se face pentru toate vitezele satisfăcînd relația

$$v < |\vec{v}| < v + dv$$

și anume, pentru acei vectori viteză care în spațiul vectorilor viteză au terminațiile înăuntrul unei pături sferice de rază interioară v și rază exterioară $v + dv$ (fig. 10.9). Funcția $f(v_x, v_y, v_z)$ depinde doar de mărimea vectorului $\vec{v}$ și are o valoare constantă în interiorul păturii sferice în care se face integrarea, deoarece dimensiunile acestei pături sferice sînt infinitezimale (dv_x, dv_y, dv_z sînt elemente infinit mici). Ca urmare, funcția $f(v_x, v_y, v_z)$ poate fi scoasă

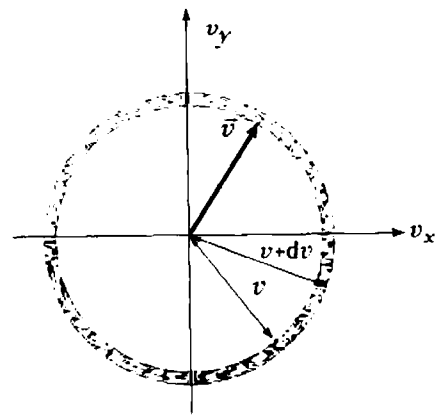


Fig. 10.9. Spațiul vectorilor viteză reprezentat în două dimensiuni, componenta v_z fiind perpendiculară pe planul desenului spre cititor. Pătura sferică desenată în culoare cenușie conține toate vitezele a căror valoare este cuprinsă între v și $v + dv$

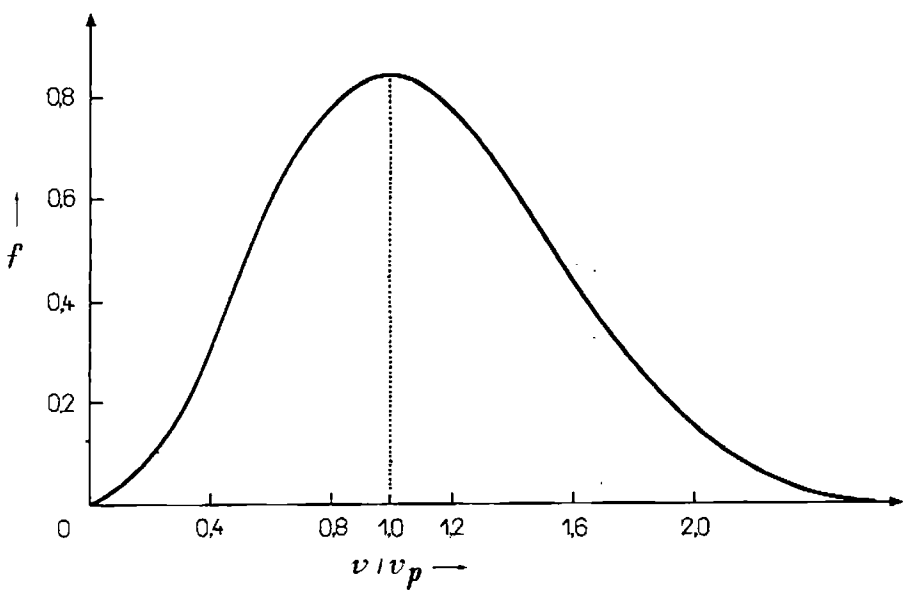


Fig. 10.10. Distribuția Maxwell a vitezelor, pentru toate direcțiile este o funcție asimetrică. Această curbă reprezintă fracțiunea f a numărului mediu al moleculelor care au viteza v în funcție de raportul v/v_p, unde v_p este viteza cea mai probabilă

de sub integrală, iar sub integrală rămîne produsul $dv_x\, dv_y\, dv_z$ care reprezintă volumul păturii sferice de rază v și grosime dv în spațiul vitezelor. Acest volum este egal cu aria păturii sferice $4\pi v^2$ multiplicată cu grosimea sa dv. În consecință, relația (10.23) devine

$$F(v)dv = 4\pi f(v_x, v_y, v_z)v^2\, dv =$$

$$= 4\pi\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2\, dv \qquad (10.24)$$

unde s-a folosit expresia funcției $f(v_x, v_y, v_z)$ dată în relația (10.21), ținînd seama că $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$.

Funcția de distribuție redată de (10.24) se mai numește *funcția lui Maxwell* sau *distribuția lui Maxwell*. Reprezentarea grafică a funcției $F(v)$ este dată în figura 10.10 și se observă că funcția nu este simetrică din cauza factorului v^2 care intervine în expresia (10.24). Spre deosebire de funcția $F(v)$, funcția $f(u)$ dată de relația (10.20) era simetrică. Valoarea v a vitezei este totdeauna pozitivă, iar valoarea cea mai probabilă a acestei mărimi este diferită de zero; această valoare va fi calculată în paragraful următor. Spre deosebire de această funcție, la funcția $f(u)$ variabila u putea fi atît pozitivă cît și negativă; la funcția $f(u)$ valoarea cea mai probabilă era nulă.

10.7. Atmosfera planetelor

Dintre multele aplicații ale distribuției lui Maxwell vom alege, pentru exemplificare, pe aceea care explică existența și neexistența atmosferei planetelor. Pe baza expresiei (10.24) se pot deduce cîteva mărimi caracteristice ale distribuției lui Maxwell. Dacă funcția de distribuție $F(v)$ este integrată pentru toate valorile posibile ale vitezelor $v = |\vec{v}|$, rezultatul este tocmai numărul mediu de molecule în unitatea de volum

$$\int_0^\infty F(v)\, dv = n \qquad (10.25)$$

Limita inferioară a integralei reflectă faptul că în distribuția lui Maxwell, valoarea v a mărimii vitezelor moleculelor nu poate fi negativă. Valoarea cea mai probabilă v_p este acea valoare pentru care funcția $F(v)$ este maximă. Aceasta poate fi găsită din condiția $dF/dv = 0$. Derivînd expresia (10.24) în raport cu v se obține

$$\left(-\frac{2vm}{2kT}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right)v^2 + e^{-\frac{mv^2}{2kT}}(2v) = 0$$

de unde rezultă viteza cea mai probabilă v_p

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Prin urmare, viteza cea mai probabilă este cu atît mai mare cu cît masa moleculei este mai mică. Deci, la o temperatură dată, viteza cea mai probabilă

este mai mare, de exemplu, pentru hidrogen decît pentru oxigen ($m_{H_2} < m_{O_2}$). De asemenea, viteza cea mai probabilă crește cu temperatura T, adică cu mișcarea de agitație termică a moleculelor gazului.

În figura 10.11 se arată *distribuția Maxwell* a moleculelor unei specii de gaz pentru trei temperaturi diferite. Întrucît distribuția se referă la același număr de molecule pe unitatea de volum, suprafața delimitată între curbele $F(v)$ și axa absciselor rămîne aceeași pentru toate cele trei temperaturi, în concordanță cu relația (10.25). Cu creșterea temperaturii T, viteza v_p crește cum s-a arătat mai înainte și, cum se observă și pe figură, curba se aplatizează, deoarece exponentul din (10.24) se micșorează în valoare absolută.

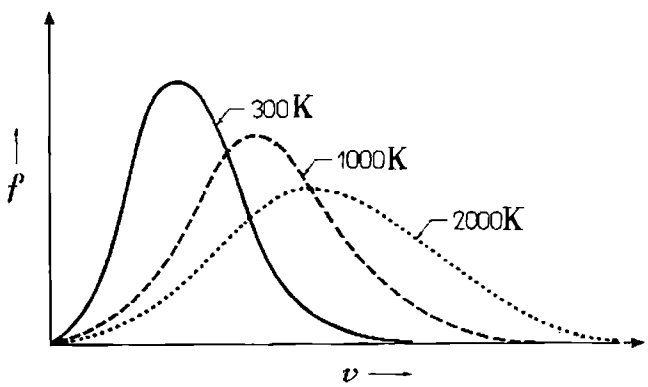


Fig. 10.11. Distribuția Maxwell pentru o aceeași specie de gaz, la temperaturi T diferite. În ordonată este reprezentată fracțiunea f a numărului moleculelor care au viteza v iar în abscisă viteza v a moleculei

Cu aceste date se pot construi distribuțiile Maxwell pentru oricare din gazele constituente ale atmosferei unei planete. Ca exemplu, se calculează funcțiile $F(v)$ pentru cîteva gaze: hidrogenul, heliul, amoniacul, vaporii de apă, azotul și oxigenul; calculele se fac pentru două temperaturi alese din varietatea mare a temperaturilor posibile în atmosferele planetelor și anume $T_1 = 300$ K și $T_2 = 2\,500$ K. Rezultatele calculelor, sau cu alte cuvinte funcțiile $F(v)$, sînt redate în figura 10.12. Se observă că viteza cea mai probabilă scade cu creșterea masei moleculei și cu scăderea temperaturii.

Moleculele din atmosferă se mișcă în toate direcțiile și ca atare pot executa la limita exterioară a atmosferei salturi spre exteriorul atmosferei. Dacă viteza moleculelor de gaz depășește *viteza de evadare* corespunzătoare planetei din a căror atmosferă fac parte, aceste molecule părăsesc planeta. Ca urmare, atmosfera unei planete pierde prin straturile sale superioare în primul rînd gazele ușoare. Astfel din atmosfera unei planete pleacă, în primul rînd, moleculele de hidrogen, care sînt cele mai ușoare. Hidrogenul are un rol predominant deoarece este principalul constituent al oricărei atmosfere „primitive", fiind „materia primă" a Universului.

Cu cît viteza de evadare corespunzătoare unei planete are o valoare mai mică, cu atît pierderea atmosferei este mai probabilă, adică atmosfera pierde mai multe molecule, deoarece mai multe molecule vor avea vitezele mai mari decît viteza de evadare.

În figura 10.12 s-au indicat vitezele de evadare corespunzătoare Pămîntului și Lunii. Molecula care are o viteză mai mare decît viteza de evadare părăsește atmosfera din care face parte și pleacă în spațiul cosmic. Molecula care are o viteză mai mică decît viteza de evadare, dar mai mare decît prima

viteză cosmică, corespunzătoare planetei respective, poate ajunge la o depărtare foarte mare de planetă încît se poate considera de asemenea „pierdută". În timp, curba de distribuţie va fi „amputată" la vitezele mari, dar mişcarea de agitaţie termică aduce alte molecule în domeniul vitezelor mari, încît pînă la urmă moleculele gazului respectiv dispar din atmosfera planetei. Aşa s-a întîmplat cu cea mai mare parte a hidrogenului şi a heliului, în cazul

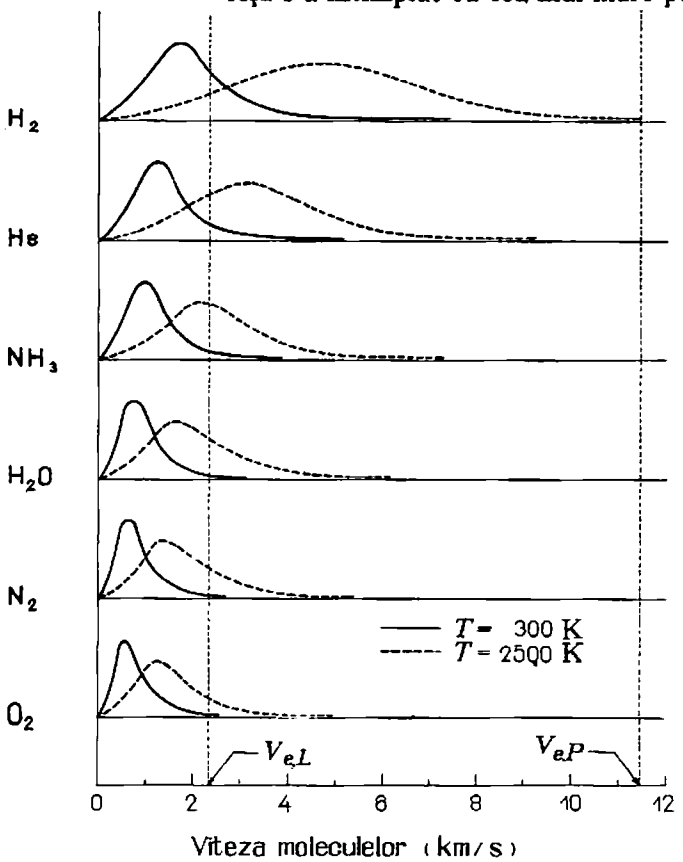


Fig. 10.12. Distribuţiile Maxwell pentru cîteva specii de gaze atmosferice, la temperatura 300 K (cu linii continue) şi 2 500 k (cu linii întrerupte). Sînt indicate viteza de evadare de pe Lună $V_{e.L}$ şi viteza de evadare de pe Pămînt $V_{e.P}$, ambele calculate de la suprafaţa astrului respectiv. Se observă că pentru temperatura de 2 500 K, vitezele cele mai probabile în cazul hidrogenului şi heliului, sînt mai mari decît viteza de evadare de pe Lună

Pămîntului, şi cu toate gazele atmosferice în cazul Lunii. Această „evaporare cosmică" a gazelor din atmosferă este redusă la o planetă mai mare, pentru care viteza de evadare corespunzătoare este mai mare. De exemplu, planeta Jupiter cu $V_e = 60$ km/s, nu a pierdut nici un gaz din atmosfera sa; hidrogenul se găseşte în atmosfera planetei Jupiter cu concentraţia corespunzătoare atmosferei primitive.

În ceea ce priveşte durata de timp în care o atmosferă îşi pierde o anumită specie de gaz, s-a stabilit că dacă viteza cea mai probabilă atinge doar un sfert din viteza de evadare, numărul moleculelor speciei respective în unitatea de volum devine neglijabil în cîteva mii de ani. După cum se vede în figura 10.12, pentru azot şi oxigen viteza cea mai probabilă rămîne mai mică decît un sfert din viteza de evadare a Pămîntului chiar la temperatura de 2 500 K, ceea ce înseamnă că azotul şi oxigenul vor rămîne în atmosfera Pămîntului.

Capitolul 11

Legea întîi a termodinamicii

11.1. Sistem şi stare

Energia internă a unui corp poate creşte sau descreşte dacă corpul respectiv suferă modificări care au ca urmare variaţia temperaturii sale sau dacă intervine un lucru efectuat de corp sau de un alt corp asupra sa. Termodinamica studiază procesele în care intervine un lucru mecanic, o variaţie a energiei termice sau o variaţie a energiei interne. Fără îndoială că legea conservării energiei guvernează şi asemenea procese, dar exprimarea dată în § 9.5 este mult prea generală şi trebuie găsite forme de exprimare ale acestei legi care să fie aplicabile direct la varietatea fenomenelor studiate de termodinamică.

Pentru a scrie ecuaţia care exprimă conservarea energiei într-un fenomen în care are loc un schimb de căldură (energie termică), este necesar să se facă apel la noţiunea de „sistem", *ale cărui interacţiuni cu mediul ambiant pot fi măsurate.* În acest capitol conceptul de interacţiune devine mai cuprinzător în sensul că şi *schimbul de energie* (termică, internă etc.) se consideră o interacţiune. Un sistem poate fi: un rezervor cu gaz, un automobil, sistemul solar şi aşa mai departe; caracteristica principală a sistemului fiind existenţa sa ca o *entitate separată de mediul înconjurător.* Un sistem poate produce căldură sau o poate absorbi; el poate efectua lucru către exterior, sau un alt sistem poate executa lucru asupra lui; de asemenea energia internă a unui sistem se poate modifica.

Prin *schimburile de energie* între sistem şi mediul înconjurător, *starea unui sistem se poate modifica.* Schimburile de energie au loc prin pereţii incintei în care este închis, sau care delimitează sistemul dat. Din acest punct de vedere *schimbările stării sistemului* închis într-o incintă se pot împărţi în două categorii:

— schimbări ale stării sistemului cu deplasarea mecanică a pereţilor incintei;

— schimbări ale stării sistemului fără deplasarea mecanică a pereților incintei.

În cazul unui sistem format dintr-un gaz închis într-un cilindru cu piston, o schimbare din prima categorie este aceea în care are loc deplasarea pistonului, de exemplu în sensul micșorării volumului inițial, ceea ce conduce la creșterea presiunii gazului sistemului. O schimbare de stare de categoria a doua poate fi ridicarea temperaturii gazului aducînd o flacără lîngă cilindru și menținînd pistonul nemișcat. Se constată că presiunea gazului s-a mărit și la schimbarea din a doua categorie. În cele două schimbări de stare creșterea presiunii are cauze diferite: micșorarea volumului la temperatură constantă și creșterea temperaturii la volum constant. Ca urmare, stările finale la care conduc cele două fenomene sînt diferite deoarece ele, deși pot avea aceeași presiune, diferă în ceea ce privește volumul și temperatura.

La schimbarea de stare fără deplasarea mecanică a vreunei părți a incintei a avut loc un schimb de căldură între sistem și mediul ambiant. Viteza schimbului de căldură depinde de proprietățile termoconductoare sau termoizolante ale materialului din care este confecționată incinta. La o incintă izolantă ideală starea sistemului ar putea rămîne nemodificată pe o durată foarte mare. De exemplu, aerul lichid sau oțelul topit ar rămîne în acee aș stare luni de zile sau chiar ani, dacă ar fi conținut într-o astfel de incintă. Această incintă se numește *incintă adiabatică* și are un rol deosebit de mare în studiul termodinamicii. Vasul Dewar este un exemplu de incintă adiabatică.

Ce fel de schimbare poate suferi starea unui sistem închis într-o incintă adiabatică? Deoarece pentru o incintă adiabatică schimbul de energie termică este imposibil, rezultă că starea unui sistem într-o incintă adiabatică poate fi modificată numai prin deplasarea mecanică a pereților incintei. Schimbarea stării unui sistem închis într-o incintă adiabatică se numește *transformare adiabatică* sau *proces adiabatic*. De exemplu, gazul închis într-un cilindru cu piston, ambele confecționate din material perfect izolant, poate suferi numai transformări adiabatice, deoarece materialul cilindrului nu permite un schimb de energie termică cu mediul ambiant.

Pentru incintele reale din punctul de vedere al izolării termice caracterul adiabatic al proceselor ce pot avea loc este relativ. O aceeași incintă poate fi considerată adiabatică pentru anumite transformări, și anume, pentru acelea cu o durată redusă, și neadiabatică pentru altele. De exemplu, o pompă de bicicletă poate fi considerată incintă adiabatică la mișcarea rapidă a pistonului; în acest caz, aerul din pompă suferă o transformare adiabatică, pe cînd transformarea corespunzătoare unei mișcări lente a pistonului nu este adiabatică.

Convenție de semn. Pentru studiul proceselor de care se ocupă termodinamica este important să se adopte o convenție asupra semnului lucrului și a căldurii, întrucît transferul acestor mărimi se poate face în ambele sensuri și anume de la sistem către mediul înconjurător și de la mediul ambiant către sistem.

Orice convenție poate fi adoptată, dar vom ține seama de aspectul tehnic care ne interesează în mai mare măsură. Studiem termodinamica pentru a obține de la o mașină termică mai mult lucru atunci cînd i se dă o anumită energie termică. Cu alte cuvinte, din acest punct de vedere al termodinamicii „sistemul" studiat în principal este mașina termică. Din acest

motiv, în convenţia adoptată se consideră că lucrul are semnul pozitiv dacă este cedat de sistem şi că lucrul are semnul negativ dacă este primit de sistem. În ceea ce priveşte energia termică (căldura), se foloseşte convenţia inversă şi anume căldura are semnul pozitiv cînd sistemul o primeşte din exterior (de la un rezervor de căldură) şi are semnul negativ atunci cînd sistemul o cedează către exterior. Convenţia adoptată este schematizată în figura 11.1.

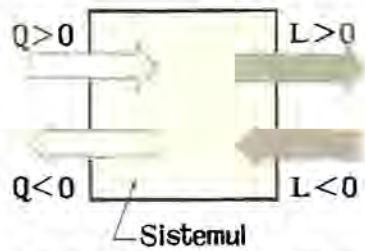


Fig. 11.1. Convenţia de semn făcută asupra lucrului L şi a căldurii Q schimbate de un sistem termodinamic cu mediul înconjurător sau cu alt sistem.

11.2. Legea întîi a termodinamicii pentru procesele adiabatice

Experimentul lui Joule, cunoscut din fizica de liceu, permite să se stabilească prima lege a termodinamicii pentru procesele adiabatice. Acest experiment se efectuează într-un calorimetru, care prin construcţia sa constituie o incintă adiabatică. Sistemul supus experimentului este apa cuprinsă în interiorul calorimetrului. Spre deosebire de un calorimetru obişnuit, în acest caz prin peretele superior al incintei pătrunde un ax; pe ax sînt fixate mai multe palete, astfel încît suprafaţa de contact cu apa să fie cît mai mare. Axul este pus în mişcare prin căderea de la înălţimea h a două mase, $m_1 = m_2 = m$. Starea sistemului se modifică prin mişcarea paletelor în apa din calorimetru. Lucrul $L^* = 2\,mgh$ efectuat de cele două mase în căderea lor se transmite sistemului, prin mişcarea paletelor, şi ca urmare energia internă a apei se modifică. Starea sistemului se modifică. Starea sistemului, adică energia sa internă, se caracterizează prin temperatura θ a apei, măsurată cu un termometru. Fie θ_i temperatura iniţială, înainte de căderea maselor şi θ_f temperatura finală, după căderea maselor; cele două temperaturi corespund energiei interne iniţiale U_i şi respectiv, energiei interne finale U_f. Experimentul lui Joule arată că după căderea maselor $\theta_f > \theta_i$ şi deci $U_f > U_i$, adică în acest proces adiabatic energia internă creşte pe seama efectuării unui lucru de către mase în căderea lor.

Conform legii conservării energiei lucrul L^* efectuat de masele în cădere este egal cu creşterea energiei interne a apei din incinta adiabatică, deci

$$L^* = U_f - U_i$$

Pentru cele ce urmează, mai interesant este lucrul L efectuat de sistem. Deoarece $L = -L^*$, expresia anterioară se scrie $-L = U_f - U_i$ sau

$$L = U_i - U_f \tag{11.1}$$

Relaţia (11.1) este expresia legii întîi a termodinamicii pentru procesele adiabatice. Din această relaţie se observă că lucrul L este negativ, deoarece $U_i < U_f$, fapt care este în concordanţă cu convenţia adoptată în figura 11.1, deoarece în acest montaj experimental sistemul primeşte lucru.

La repetarea experienţei lui Joule, cu modificarea pe rînd fie a naturii substanţei sistemului (apă, alcool, ulei etc.), fie a vitezelor de rotaţie a scriptelor, fie a maselor m, dar păstrînd constantă valoarea lucrului efectuat, se obţine de fiecare dată aceeaşi creştere a temperaturii, $\theta_i \to \theta_f$, ceea ce face să se tragă concluzia următoare:

Pentru transformarea adiabatică a unui sistem dintr-o stare iniţială bine determinată într-o stare finală bine determinată este necesar totdeauna acelaşi lucru, indiferent de modul în care se realizează transformarea adiabatică respectivă.

Un caz interesant îl constituie *sistemul izolat* care este sistemul închis într-o incintă adiabatică, absolut rigidă, adică cu pereții ficși, nedeplasabili și prin care nu poate pătrunde vreun ax sau alt mijloc prin care s-ar putea transmite sistemului energie sau lucru. În acest caz sistemul nu poate nici să primească nici să cedeze lucru: $L = 0$. Aplicînd prima lege a termodinamicii la sistemul izolat rezultă $U_i - U_f = 0$, și deci $U_i = U_f$, adică $U = \text{const}$. *Starea unui sistem izolat se poate modifica numai astfel încît energia sa internă să rămînă constantă.*

Dacă un sistem izolat conține două corpuri, atunci într-o transformare a acestui sistem, unul poate cîștiga energie pe socoteala celuilalt. Astfel, un calorimetru, în care nu pătrunde nici un „element" exterior, de exemplu, axul cu palete, constituie un sistem izolat. Dacă se introduce în calorimetru un metal înroșit are loc o transformare în care apa își crește energia internă pe seama scăderii energiei interne a metalului introdus. În orice moment al transformării energia internă totală a sistemului apă + metal, adică suma energiilor interne a metalului și a apei, este constantă.

Observație

Experimentul lui Joule constituie o transformare adiabatică a unui sistem care are ca rezultat totdeauna creșterea temperaturii apei. Nu se poate realiza transformarea inversă a sistemului: apa nu se poate răci prin ridicarea celor două mase, adică nu poate avea loc scăderea energiei interne a apei prin cedarea unui lucru către exterior. Prin urmare în acest aranjament experimental sistemul poate primi doar lucru ($L < 0$), fără însă ca să-l poată ceda către exterior ($L > 0$).

În experimentul lui Joule apare o situație similară cu aceea din cazul frecării cînd *lucrul se transformă* de asemenea *în căldură*; sistemul în care are loc frecarea primește lucru și ca urmare energia sa internă crește. Nu există inversul fenomenului frecării, adică nu există un sistem care s-ar răci și ca urmare ar produce lucru.

În termodinamică se întîlnesc însă și sisteme care pot ceda lucru (v. cap. 12), iar transformările adiabatice pe care le suferă sînt guvernate tot de expresia (11.1) a cărei generalizare are următorul enunț:

Într-o transformare adiabatică, lucrul primit de sistem ($L < 0$) *este egal cu creșterea energiei interne* ($U_i < U_f$), *iar lucrul cedat de sistem* ($L > 0$) *este egal cu scăderea energiei interne* ($U_i > U_f$).

11.3. Calculul lucrului la schimbarea de stare

Starea unui sistem se poate modifica prin variația parametrilor săi, presiunea, volumul și temperatura. Dacă se consideră sistemul format dintr-un gaz conținut într-un cilindru cu piston, se poate calcula lucrul la o schimbare de stare a volumului de gaz. Datorită forței F exercitate asupra pistonului, fie din exterior, fie de către gaz se produce o deplasare elementară a pistonului dx. Lucrul elementar dL efectuat de gaz va fi $F.dx$. Exprimînd forța F în funcție de presiunea p a gazului și de aria A a pistonului, dL se scrie

$$dL = F \cdot dx = pA \cdot dx = p \cdot dv$$

unde $A \cdot dx = dv$ reprezintă variaţia elementară a volumului datorită unei deplasări elementare dx a pistonului.

Pentru o deplasare finită, de la volumul v_1 la volumul v_2, lucrul L se scrie

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv \tag{11.2}$$

Pentru a determina lucrul L, cu ajutorul relaţiei (11.2), trebuie să se cunoască dependenţa presiunii de volumul gazului. Starea unui gaz este determinată de trei parametri termodinamici: presiunea, volumul şi temperatura. Relaţia între aceşti trei parametri se numeşte în termodinamică *ecuaţia de stare*; pentru un gaz perfect ecuaţia de stare este exprimată de legea gazului perfect

$$pv = \nu RT$$

unde ν este numărul de kilomoli şi R este constanta gazelor

$$R = 8{,}31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$$

Pentru un gaz considerat trebuie să se cunoască doar doi parametri, deoarece al treilea se deduce din ecuaţia de stare a gazului.

În cele ce urmează se analizează o transformare a unui gaz perfect între două stări, (*1*) şi (*2*), caracterizate prin presiunile şi volumele, p_1, v_1 şi respectiv p_2, v_2, indicate în figura 11.2. Pentru a trece de la o stare la alta pistonul efectuează în cilindru o anumită deplasare care necesită un lucru. Semnul lucrului depinde de variaţia volumului, aşa cum rezultă din relaţia (11.2):

— la *comprimare* ($\Delta v < 0$) lucrul este negativ, adică sistemul primeşte lucru; este necesar să se acţioneze din exterior cu o forţă imprimată asupra pistonului;

— la *destindere* ($\Delta v > 0$) lucrul este pozitiv, adică sistemul cedează lucru; gazul exercită prin piston o forţă asupra unui mecanism exterior, de exemplu asupra mecanismului bielă-vilbrochen. Destinderea gazului poate fi produsă, cel mai simplu, prin încălzirea cilindrului cu o flacără; în acest caz gazul primeşte căldură şi cedează lucru.

În particular, pentru trecerea de la starea (*1*) la starea (*2*), aşa cum este arătată în figura 11.2, deoarece are loc o comprimare, lucrul este negativ. Valoarea sa absolută este dată de aria determinată de curba care reprezintă transformarea în diagrama $p - v$, de axa absciselor şi de paralelele cu axa ordonatelor duse prin punctele de abscise v_1 şi v_2. Lucrul este dependent de modul cum se desfăşoară procesul, căci se poate ajunge de la starea (*1*) la starea (*2*) în două moduri. În primul mod se poate comprima gazul de la v_1 la v_2 la presiunea constantă p_1, cilindrul avînd o comunicare cu exteriorul prin care gazul poate ieşi în mediul ambiant. În acest caz

$$L' = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv = p_1(v_2 - v_1)$$

Apoi se realizează creşterea presiunii de la p_1 la p_2 la volum constant, încălzind pentru aceasta gazul şi închizînd comunicarea cilindrului cu exteriorul; în această parte a procesului lucrul este nul, deoarece pistonul nu execută vreo deplasare ($\Delta v = 0$). Primul mod al procesului este reprezentat în diagrama $p - v$ prin curba (*1*) — (*a*) — (*2*).

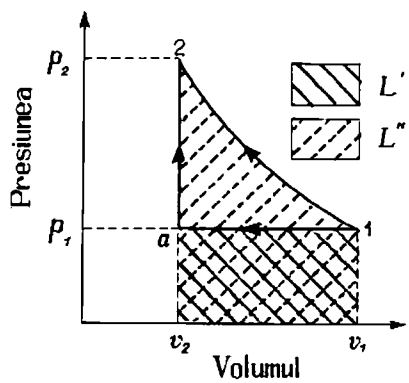


Fig. 11.2. Trecerea unui gaz din starea (*1*) în starea(*2*) se poate face prin starea intermediară (*a*) sau direct pe curba $p(v)$. Lucrul efectuat depinde de modul trecerii între cele două stări. L' este lucrul la trecerea prin (*a*), iar L'' este lucrul la trecerea pe curba $p(v)$

Al doilea mod de trecere de la starea (*1*) la starea (*2*) se poate face comprimînd gazul, fără ca cilindrul să aibă vreo comunicaţie cu exteriorul şi menţinînd temperatura gazului constantă prin introducerea cilindrului cu piston într-un termostat. Folosind ecuaţia de stare a gazului se obţine în acest caz

$$L'' = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot \mathrm{d}v = \int_{v_1}^{v_2} p(v) \cdot \mathrm{d}v$$

Se observă că $L'' \neq L'$; în diagrama $p - v$ cele două valori ale lucrului sînt reprezentate prin arii haşurate diferit. Atît L' cît şi L'' sînt negative, deoarece ambele transformări sînt, în întregime sau parţial, comprimări, dar în valoare absolută $|L'| < |L''|$. Desigur că se pot realiza şi procesele inverse, în care caz gazul se destinde, iar lucrul ar fi pozitiv.

11.4. Procesul izoterm

Transformarea pe care o suferă un sistem atunci cînd temperatura sa rămîne constantă se numeşte *proces izoterm*. Dacă sistemul este un gaz conţinut într-un cilindru cu piston, procesul izoterm are loc atunci cînd peretele cilindrului este bun conducător de căldură, iar cilindrul este plasat într-un termostat. Termostatul se poate imagina ca un rezervor cu apă avînd dimensiuni suficient de mari, astfel încît orice cantitate de căldură transferată de la cilindru la rezervor sau de la rezervor la cilindru să nu modifice temperatura apei din rezervor. Nici un proces real nu este perfect izoterm, dar multe din aceste procese pot fi aproximate ca izoterme. Procesul izoterm are o importanţă mare în studiul funcţionării unei maşini termice pe baza ciclului Carnot (v. capitolul 12).

În procesul izoterm de la starea (*1*) la starea (*2*), întrucît temperatura rămîne constantă, rezultă că energia internă rămîne constantă, căci energia internă este funcţie de temperatură,

$$U_1 - U_2 = 0$$

Prin urmare energia internă nu se modifică în transformarea izotermă. Nu se poate aplica aici legea întîi, deoarece în § 11.2 aceasta a fost scrisă numai pentru procesele adiabatice. Abia în § 11.6 se va putea deduce forma generală a legii întîi a termodinamicii.

Pentru calculul lucrului în procesul izoterm se foloseşte expresia stabilită în paragraful anterior şi se consideră ecuaţia de stare $pv = \nu RT$

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot \mathrm{d}v = \nu RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \nu RT \Big| \ln v \Big|_{v_1}^{v_2}$$

$$L = \nu RT \ln \frac{v_2}{v_1} \tag{11.3}$$

unde în afara integralei au fost scoase mărimile care rămîn constante în procesul izoterm: numărul de kilomoli şi temperatura T a gazului. La *comprimarea izotermă*, $v_1 > v_2$, logaritmul unui număr mai mic decît unitatea este

negativ şi deci lucrul este negativ. Aceasta înseamnă că se efectuează lucru din exterior asupra gazului pentru a-l comprima. La *destinderea izotermă*, $v_1 < v_2$, logaritmul este pozitiv. Rezultă în acest caz că gazul cedează lucru unui sistem exterior. În cursul unei transformări izoterme, gazul îşi menţine temperatura constantă, deoarece prin peretele cilindrului are loc un schimb de căldură cu exteriorul. Este important să se cunoască căldura Q schimbată cu exteriorul în transformarea izotermă. În § 11.6, la exprimarea generală a legii întîi a termodinamicii se va arăta că în procesul izoterm căldura Q este egală cu lucrul L.

Pentru a stabili relaţia între presiune şi volum în transformarea izotermă se foloseşte ecuaţia de stare scrisă sub forma

$$pv = \nu RT = const. \tag{11.4}$$

Cu alte cuvinte, în transformarea izotermă presiunea creşte dacă volumul scade şi invers. Matematic, curba $p(v)$ pentru $T = \text{const.}$ este o hiperbolă şi se numeşte *izotermă*. Pentru o altă temperatură, constanta din relaţia (11.4) are o altă valoare, iar curba $p(v)$ va fi descrisă de o altă hiperbolă. În figura 11.3 este arătată familia de hiperbole care reprezintă transformările izoterme ale unei anumite cantităţi de gaz la diferite temperaturi.

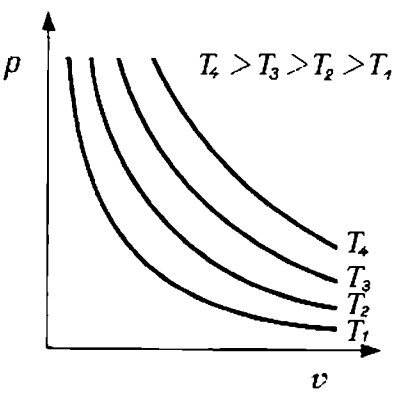


Fig. 11.3. Reţeaua de izoterme a unei cantităţi de gaz perfect la diferite temperaturi $T_1 \ldots T_4$

Relaţia (11.3) exprimă faptul că într-o transformare izotermă lucrul L este cu atît mai mare cu cît temperatura T este mai mare. În reprezentarea grafică din figura 11.4 se observă că pentru o trecere între volumele v_1 şi v_2, lucrul L este mai mare pentru temperatura $T_2 > T_1$, deoarece aria izotermei corespunzătoare temperaturii T_2 este mai mare decît aceea corespunzătoare temperaturii T_1.

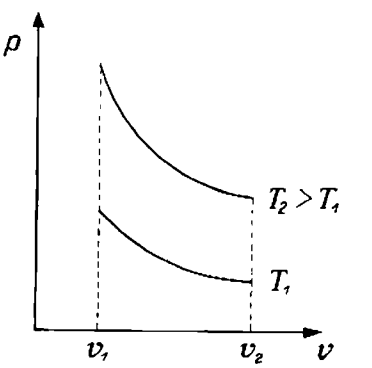


Fig. 11.4. În transformarea izotermă lucrul este cu atît mai mare cu cît temperatura este mai mare

11.5. Procesul adiabatic

Procesul adiabatic este transformarea pe care o suferă un sistem închis într-o incintă adiabatică. Procesele termodinamice care se petrec foarte repede sînt aproximativ adiabatice, deoarece transferul de căldură necesită un anumit timp şi procesul se poate termina înainte ca o cantitate de căldură să fi putut trece prin pereţii incintei respective. Prima lege a termodinamicii afirmă că într-un proces adiabatic, lucrul efectuat de sistem este egal cu variaţia energiei interne

$$L = U_i - U_f$$

Pentru un gaz conţinut într-un corp de pompă (cilindru cu piston) adiabatic, lucrul va fi pozitiv la destinderea gazului şi negativ la comprimarea gazului (§ 11.3). Prin urmare:

— la destinderea adiabatică, lucrul fiind pozitiv rezultă $U_i - U_f > 0$, sau $U_i > U_f$; cu alte cuvinte, energia internă scade (temperatura gazului scade, deoarece energia internă este proporţională cu temperatura);

— la comprimarea adiabatică, lucrul fiind negativ rezultă $U_i - U_f < 0$ sau $U_i < U_f$, ceea ce înseamnă că energia internă creşte (temperatura gazului creşte).

Într-un proces adiabatic se poate exprima matematic legătura între parametrii termodinamici, astfel încît să se poată ajunge la reprezentarea grafică în diagrama $p - v$. Pentru aceasta se exprimă variaţia energiei interne ΔU

în funcţie de variaţia temperaturii ΔT, prin relaţia

$$\Delta U = \nu \cdot C \cdot \Delta T \tag{11.5}$$

unde ν este numărul de kilomoli din cantitatea de gaz, iar C este căldura specifică pentru un kilomol (căldură specifică kilomolară). Prima lege a termodinamicii (§ 11.2) pentru procesul adiabatic se scrie

$$p \cdot \Delta v = -\Delta U \qquad (\Delta U \equiv U_f - U_i)$$

$$-p \cdot \Delta v = \nu \cdot C \cdot \Delta T$$

iar cu ajutorul ecuaţiei de stare a gazului perfect

$$-\frac{\nu RT}{v}\Delta v = \nu \cdot C \cdot \Delta T$$

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{C}\frac{\Delta v}{v}$$

şi la limită

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{C}\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{11.6}$$

Pentru a găsi temperatura finală T_2 a unui gaz care suferă un proces adiabatic de la volumul iniţial v_1 şi temperatura T_1 la volumul final v_2, vom integra între aceste două stări

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{C}\int_{v_1}^{v_2}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = -\frac{R}{C}(\ln v_2 - \ln v_1)$$

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{C}\ln\frac{v_1}{v_2}; \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{R}{C}}$$

$$T_1 v_1^{\frac{R}{C}} = T_2 v_2^{\frac{R}{C}} \tag{11.7}$$

Într-un proces adiabatic produsul $T \times v^{\frac{R}{C}}$ rămîne constant. Pentru a ajunge la diagrama $p - v$, în relaţia (11.7) se elimină temperatura T. Deoarece la începutul şi la sfîrşitul procesului ecuaţiile care descriu cele două stări sînt respectiv $p_1 v_1 = \nu R T_1$ şi $p_2 v_2 = \nu R T_2$, urmează că

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{T_2}{T_1}; \qquad \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{R}{C}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{R}{C}+1}$$

Notînd $\frac{R}{C} + 1 = \frac{R + C}{C} = \gamma$, rezultă pentru un proces adiabatic

$$p_1 \cdot v_1^{\gamma} = p_2 \cdot v_2^{\gamma} \tag{11.8}$$

Produsul $p \times v^{\gamma}$ rămîne constant, în timp ce temperatura variază. Din definiția factorului γ se observă că totdeauna $\gamma > 1$. Curba $p(v)$ se numește în acest caz *adiabată* și are o alură asemănătoare cu a izotermei, dar din punct de vedere matematic ele diferă. Printr-un punct dat, în diagrama $p - v$, trece și o izotermă și o adiabată (figura 11.5). Cu alte cuvinte, un sistem format dintr-un gaz la presiunea p_0 și volumul v_0 poate fi supus fie unei destinderi izoterme, ajungînd la presiunea p_i și volumul v, fie unei destinderi adiabatice ajungînd la presiunea p_a și volumul v. Scriind ecuațiile pentru izotermă și adiabată

$$p_0 v_0 = p_i v$$

$$p_0 v_0^{\gamma} = p_a v^{\gamma}$$

se obține

$$\frac{p_a v^{\gamma}}{p_i v} = \frac{v_0^{\gamma}}{v_0}; \qquad \frac{p_a}{p_i} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma - 1}$$

Deoarece $v_0 < v$, rezultă $p_a < p_i$, adică adiabata este mai înclinată decît izoterma. Scăderea presiunii pe izotermă este o urmare a creșterii volumului, pe cînd scăderea presiunii pe adiabată este urmarea atît a creșterii volumului,

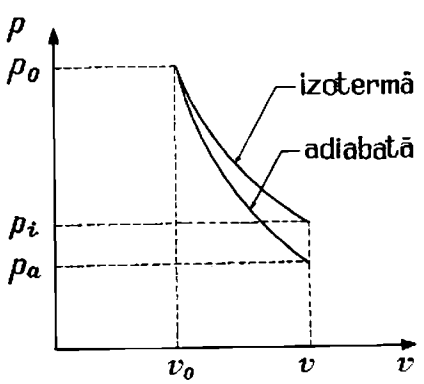


Fig. 11.5. Un gaz perfect în starea (p_0, v_0) poate ajunge la volumul v, fie pe o izotermă (presiunea finală este p_i), fie pe o adiabată (presiunea finală este p_a)

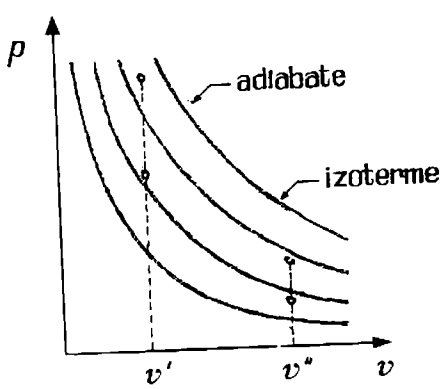


Fig. 11.6. Familia de izoterme (pv = = const) și familia de adiabate (pv^{γ} = = const) pentru o cantitate de gaz perfect

cît și a scăderii temperaturii. Cu alte cuvinte, adiabata este mai înclinată decît izoterma, deoarece la destinderea adiabatică energia internă scade (ceea ce conduce la o presiune mai mică), pe cînd pe izotermă energia internă rămîne constantă.

Notă

Relaţia (11.8) exprimă ecuaţia adiabatei în funcţie de presiune şi volum. În unele cazuri este necesară ecuaţia adiabatei în funcţie de temperatură şi volum. Pentru aceasta se foloseşte relaţia (11.8) şi ecuaţiile care descriu cele două stări ale gazului, de la începutul şi sfîrşitul procesului adiabatic

$$p_1 v_1 = \nu R T_1; \qquad p_2 v_2 = \nu R T_2$$

Eliminînd presiunile p_1 şi p_2 se obţine

$$T_1 \cdot v_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot v_2^{\gamma-1} \tag{11.9}$$

Pentru un anumit sistem, de exemplu gazul dintr-un cilindru cu piston, se pot trasa în diagrama $p - v$ atît familia de izoterme, cît şi familia de adiabate (fig. 11.6). Lucrul într-un proces adiabatic este dat aşa cum arată legea întîi a termodinamicii, de diferenţa energiilor interne $U_i - U_f$. În diagrama $p - v$, valoarea sa este dată de aria corespunzătoare porţiunii delimitată de adiabata respectivă. Pentru aceeaşi variaţie de volum şi aceeaşi presiune iniţială, de exemplu $v' \to v''$ în figura 11.6, lucrul este mai mare pentru o adiabată mai „înaltă".

11.6. Exprimarea generală a legii întîi a termodinamicii

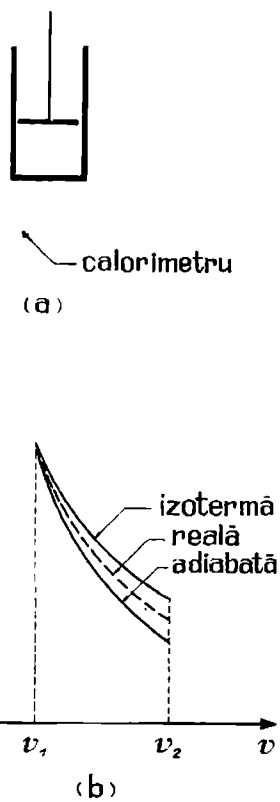


Fig. 11.7. Un gaz perfect într-un cilindru cu piston poate suferi destinderea în trei moduri: pe o izotermă, pe o adiabată sau pe o curbă reală, cuprinsă între primele două

Se consideră un gaz perfect conţinut într-un cilindru cu piston, totul plasat într-o incintă adiabatică (calorimetru). Se lasă gazul să se destindă de la volumul v_1 la volumul v_2 în trei moduri:

— destindere lentă, pe izotermă;

— destindere rapidă, pe adiabată;

— destindere reală, pe o curbă oarecare cuprinsă între izotermă şi adiabată, aşa cum se arată în figura 11.7.

Ultima transformare este cea care se întîlneşte în realitate, iar exprimarea legii întîi a termodinamicii pentru un asemenea proces constituie cea mai generală formulare a acestei legi.

Lucrul L efectuat de gaz la destinderea de la v_1 la v_2, $L = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv$, este dat de aria corespunzătoare porţiunii din curba $p(v)$ a modului de transformare considerat. După cum se vede, lucrul pe izotermă este mai mare decît cel de pe adiabată. În ceea ce priveşte variaţia energiei interne se poate scrie

— pe izotermă $U_i - U_f = 0$

— pe adiabată $U_i - U_f = L$

Din cele de mai sus şi din figură se observă că pe izotermă, deşi $U_i - U_f = 0$, lucrul efectuat este maxim; aceasta înseamnă că lucrul nu este funcţie numai de variaţia energiei interne, ci şi de alţi parametri. Pe curba plasată între izotermă şi adiabată, variaţia energiei interne $U_i - U_f$ este mai mică decît

variația $U_i - U_f$ pe adiabată, deoarece variația de temperatură este zero pe izotermă și maximă pe adiabată. Lucrul L pe curba reală este mai mare decît cel pe adiabată, deoarecc aria corespunzătoare curbei reale este mai mare decît aceea corespunzătoare adiabatei; prin urmare, pe această curbă

$$U_i - U_f < L$$

Cu alte cuvinte, la o destindere reală, lucrul efectuat de gaz este mai mare decît variația, între cele două stări, a energiei interne a gazului. După această analiză calitativă, examinarea aspectului cantitativ ne va conduce la exprimarea generală a primei legi a termodinamicii.

Diferența care există între variația energiei interne $U_i - U_f$ și lucrul L se datorește faptului că cilindrul nu este o incintă adiabatică și ca urmare va schimba energia cu mediul său ambiant, adică cu apa din calorimetru. Prima lege a termodinamicii se poate aplica întregului calorimetru, sistem format din cilindrul cu piston și apa din calorimetru, sistem care este conținut într-o incintă adiabatică. Se vor folosi următoarele notații pentru energia internă a componentelor sistemului, gaz și apă, precum și pentru sistemul în ansamblu, gaz + apă:

	Gaz	Apă	Gaz + Apă
inițial	U_i	U'_i	$U_i + U'_i$
final	U_f	U'_f	$U_f + U'_f$

Conform primei legi a termodinamicii rezultă pentru transformarea adiabatică a întregului sistem

$$(U_i + U'_i) - (U_f + U'_f) = L$$

Ceea ce înseamnă că pentru gaz, $U_i - U_f$ va fi

$$U_i - U_f = L - (U'_i - U'_f)$$

Mărimea $U'_i - U'_f$ reprezintă scăderea energiei interne a apei și ea este tocmai energia pe care apa o cedează gazului din cilindru, în timpul destinderii de la v_1 la v_2. Datorită acestui aport de energie din exterior, variația energiei interne a gazului $U_i - U_f$ este mai mică decît lucrul efectuat de gaz la destindere. Cu alte cuvinte, gazul efectuează lucru nu numai pe contul energiei sale interne ci și pe contul energiei interne, a apei, adică a mediului exterior gazului.

Se definește căldura Q, ca energia cedată de un corp altuia, fără a se efectua un lucru,

$$Q \equiv U'_i - U'_f$$

În exemplul de mai sus energia este cedată gazului de către apă și nu se efectuează lucru, deoarece transferul de energie se face prin peretele cilindrului. Se ajunge astfel la exprimarea generală a legii întîi a termodinamicii, care descrie procesele pe care le poate suferi un sistem la o schimbare de stare

$$U_i - U_f = L - Q$$

sau

$$L = U_i - U_f + Q \tag{11.10}$$

Semnificaţia expresiei (11.10) este aceea că lucrul L efectuat de un sistem se face nu numai pe seama energiei sale interne, ci şi a energiei interne a mediului exterior. Din punctul de vedere al schimbului de energie cu mediul exterior, mediul exterior se comportă ca un „rezervor de căldură" în raport cu sistemul. Pentru acest motiv se spune că rezervorul de căldură transferă căldura Q sistemului care suferă transformarea. Conform convenţiei făcute în § 11.1, dacă sistemul primeşte căldura Q de la rezervorul de căldură se scrie $Q > 0$, iar dacă sistemul cedează căldura Q rezervorului de căldură, atunci $Q < 0$.

Din relaţia (11.10) se observă că, dacă energia internă a sistemului scade în timpul procesului, $U_i > U_f$, şi dacă sistemul primeşte căldură din exterior, $Q > 0$, atunci lucrul efectuat de sistem este pozitiv, $L > 0$, adică sistemul cedează lucru unui mecanism exterior. Se observă de asemenea că se poate obţine lucrul pozitiv, adică sistemul cedează lucru către exterior, chiar şi atunci cînd energia internă a gazului creşte, deci cînd $U_i < U_f$, cu condiţia ca $Q > 0$ şi anume $Q > U_f - U_i$. Această ultimă situaţie se întîlneşte atunci cînd se încălzeşte cu o flacără gazul dintr-un cilindru cu piston ($Q > 0$). Ca urmare, temperatura gazului creşte, deci $U_f > U_i$ şi gazul se destinde; destinderea gazului produce deplasarea pistonului, încît se produce un lucru către exterior, care poate pune în mişcare un anumit mecanism. Aceste consideraţii vor ajuta la înţelegerea scopului maşinilor termice: obţinerea lucrului din căldură.

În cazul proceselor adiabatice, pentru care $Q = 0$, relaţia (11.10) se reduce la forma (11.1) care reprezintă exprimarea legii întîi a termodinamicii pentru procesele adiabatice. În cazul determinării căldurii Q, ca în calorimetrie, se măsoară variaţia energiei interne a apei din calorimetru, după ce se introduce un alt corp. Întrucît transferul de căldură dintre corp şi apă se face fără efectuare de lucru ($L = 0$) relaţia (11.10) devine

$$U_i - U_f + Q = 0 \; ; \qquad U_f - U_i = Q$$

Pentru un proces izoterm, $U_i = U_f$ deoarece temperatura sistemului rămîne constantă; ca urmare, legea întîi, exprimată de relaţia (11.10), devine

$$L = Q$$

Prin urmare, într-un proces izoterm, la destindere, lucrul cedat de sistem este egal cu căldura primită de acesta de la un rezervor de căldură exterior, iar la comprimare, lucrul primit de sistem este egal cu căldura cedată de acesta rezervorului de căldură. Cu alte cuvinte, în transformarea izotermă, cele două mărimi, L şi Q sînt egale şi de acelaşi semn.

În tabelul 11.1 sînt arătate caracteristicile termodinamice ale celor patru transformări de stare: izocoră, izobară, izotermă şi adiabatică.

Tabelul 11.1

Variația parametrilor termodinamici, a energiei interne, a căldurii și a lucrului, precum și relația între parametri pentru patru transformări de stare

Transformarea	Δv	Δp	ΔT	ΔU	Q	L	Relația între parametri
Izocoră	0	±	±	±	±	0	$\frac{p}{p'} = \frac{T}{T'}$
Izobară	±	0	±	±	±	±	$\frac{v}{v'} = \frac{T}{T'}$
Izotermă	±	±	0	0	±	±	$pv = p'v'$
Adiabatică	±	±	±	±	0	±	$pv^\gamma = p'v'^\gamma$ $(Tv^{\gamma-1} = T'v'^{\gamma-1}$

11.7. Procesele ciclice monoterme

Termodinamica se ocupă în special de *procesele ciclice*, deoarece ele sînt procesele caracteristice funcționării mașinilor termice. Procesul ciclic este procesul în care sistemul revine, după ce suferă o transformare, la starea sa inițială, din punctul de vedere al energiei sale interne. Un gaz închis într-un cilindru cu piston poate suferi un proces ciclic, dacă pistonul este legat la un volant (fig. 11.8), așa cum se întîmplă la o mașină termică și dacă se alege ciclul de funcționare, astfel încît la sfîrșitul ciclului parametrii termodinamici ai gazului să revină la valorile inițiale.

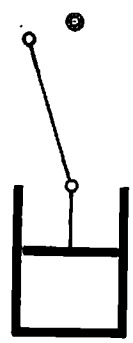


Fig. 11.8. Legarea pistonului la un volant realizează procesul ciclic dacă gazul revine în starea inițială

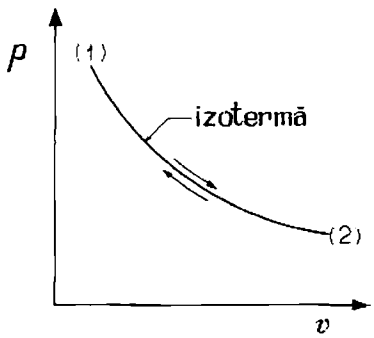
Dacă cilindrul cu piston este în contact cu un rezervor de căldură, atunci prin peretele cilindrului poate avea loc transferul de căldură în ambele sensuri, atît de la gaz la rezervorul de căldură, cît și de la rezervor la gaz. Rezervorul de căldură este caracterizat printr-o anumită temperatură care se presupune constantă în timp. Dacă dimensiunile rezervorului sînt mari față de acelea ale cilindrului cu piston, atunci schimburile de căldură nu modifică temperatura rezervorului de căldură.

Procesul ciclic, care are loc într-un corp de pompă în contact cu *un singur rezervor de căldură*, menținut la o temperatură dată, se numește *proces ciclic monoterm*.

În § 11.6 s-a văzut că un sistem termodinamic poate ceda lucru dacă primește căldură de la un rezervor de căldură exterior sistemului. Prima problemă care interesează este obținerea răspunsului la întrebarea: *poate funcționa o mașină termică cu un singur rezervor de căldură*? Cu alte cuvinte: *care este bilanțul energetic al unui proces ciclic monoterm*?

Se poate aplica legea întîi a termodinamicii procesului ciclic în întregime. Dacă procesul ciclic este compus din procese parțiale, se notează cu L_t lucrul total efectuat de sistem în întregul proces ciclic și cu Q_t căldura totală schimbată de gaz cu rezervorul de căldură exterior în întregul proces ciclic. Deoarece pentru un proces ciclic $U_i = U_f$, relația (11.10) care exprimă legea întîi a termodinamicii devine

$$L_t = Q_t \qquad (11.11)$$



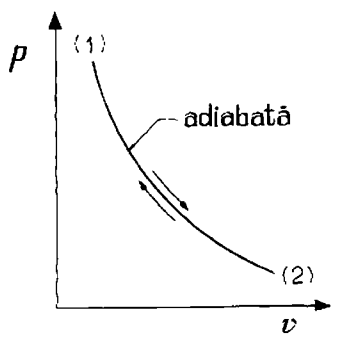


Fig. 11.9. Procesul ciclic pe izotermă și procesul ciclic pe adiabată.

Prin urmare, într-un proces ciclic lucrul total efectuat de sistem (cedat sau primit) este egal cu căldura totală schimbată cu rezervorul de căldură (cedată sau primită).

Într-un proces ciclic gazul poate trece din starea inițială în starea finală în mai multe moduri. Două dintre aceste moduri sînt reprezentate în figura 11.9. În figura 11.9, *a* gazul trece printr-o destindere izotermă din starea (*1*) în starea (*2*) și revine la starea (*1*) printr-o comprimare izotermă. Lucrurile parțiale pentru destindere și pentru comprimare vor fi egale și de semn contrar

$$L_{12} = -L_{21}$$

încît lucrul total este egal cu zero

$$L_t = L_{12} + L_{21} = 0$$

În figura 11.9, *b* gazul trece printr-o destindere adiabatică din starea (*1*) în starea (*2*) și revine la starea (*1*) printr-o comprimare adiabatică. Ca și în cazul precedent

$$L_{12} = -L_{21}$$

și deci

$$L_t = L_{12} + L_{21} = 0$$

Conform relației (11.11) în ambele procese ciclice studiate, atît pe izotermă cît și pe adiabată, $Q_t = 0$. Prin urmare, procesul ciclic efectuat pe o izotermă sau pe o adiabată *nu poate furniza lucru* și deci nu poate sta la baza funcționării unei mașini termice.

Un al treilea mod în care se poate realiza procesul ciclic monoterm este acela reprezentat în figura 11.10. În acest mod gazul din corpul de pompă în contact cu un singur rezervor de căldură, suferă două transformări adiabatice și două transformări izocore, cum se va arăta mai departe, astfel încît suprafața ciclului în diagrama $p - v$ este diferită de zero, spre deosebire de modurile reprezentate în figura 11.9.

În starea inițială temperatura gazului din cilindru este egală cu aceea a rezervorului de căldură care înconjură cilindrul. Procesul ciclic studiat începe cu o destindere adiabatică ($1 \to 2$) în care temperatura gazului scade. Urmează o transformare izocoră, pistonul rămîne nemișcat, în care gazul absoarbe căldură de la rezervorul de căldură, ridicîndu-și temperatura la valoarea inițială. În continuare urmează o comprimare adiabatică ($2' \to 1'$) pînă la volumul inițial v_1 și ca urmare temperatura gazului crește. În ultima parte a procesului, transformare izocoră, gazul se răcește la volum constant cedînd căldură rezervorului de căldură; temperatura gazului revine la valoarea inițială egală cu aceea a rezervorului de căldură.

Pentru a scrie bilanțul energetic se observă că pe adiabate, la destindere și la comprimare,

$$L_{12} > 0; \qquad L_{2'1'} < 0;$$

$$|L_{12}| < |L_{2'1'}|$$

În transformările izocore lucrurile sînt nule, deoarece variațiile de volum sînt egale cu zero. Deci, lucrul total obținut prin însumarea celor patru etape ale procesului ciclic monoterm este

$$L_t = L_{12} - L_{2'1'} < 0$$

Conform relației (11.11) rezultă $Q_t < 0$, ceea ce se explică prin faptul că gazul cedează la trecerea $1' \to 1$ mai multă căldură decît absoarbe la trecerea $2 \to 2'$.

Lucrul total fiind negativ și căldura totală fiind negativă, rezultă că *în procesul ciclic monoterm sistemul primește lucru și cedează căldură.* Ceea ce trebuie subliniat este faptul că în orice tip de proces ciclic monoterm, adică corpul de pompă să fie în contact cu un singur rezervor de căldură, sistemul primește lucru și cedează căldură. În acest proces are loc același bilanț energetic ca și în fenomenul frecării: *lucrul se transformă în căldură.* Ca urmare procesul ciclic monoterm nu poate sta la baza funcționării unei mașini termice al cărei scop principal este să cedeze lucru cu ajutorul căldurii, adică să transforme căldura în lucru.

Cu alte cuvinte, o mașină termică nu poate funcționa cu un singur rezervor de căldură. Această concluzie a fost stabilită în urma examinării procesului ciclic monoterm și nu poate fi dedusă numai din aplicarea legii întîi a termodinamicii. Această lege spune că în procesul ciclic $L_t = Q_t$, dar nu spune nimic despre modul de desfășurare a procesului, adică despre posibilitatea de transformare a lucrului în căldură sau a căldurii în lucru. În analiza procesului ciclic monoterm, pe lîngă folosirea legii întîi a termodinamicii, s-a precizat modul de desfășurare a proceselor parțiale. Acestea sînt fapte experimentale a căror descriere ar trebui conținută într-o lege. Legea care descrie aceste aspecte ale naturii este legea a doua a termodinamicii. Altfel spus, legea întîi a termodinamicii este necesară pentru descrierea unor procese din natură, dar nu este suficientă.

Procesul ciclic monoterm este caracterizat în diagrama $p - v$ prin sensul de parcurgere al ciclului care este sensul trigonometric pozitiv și are bilanțul energetic schematizat în figura 11.11. Se observă din figura 11.10 că destinderea gazului se face la presiuni mai mici decît comprimarea gazului și aceasta face ca lucrul să fie negativ. Pentru ca lucrul total într-un proces ciclic să fie pozitiv este necesar ca destinderea gazului să se facă la presiuni mai mari decît acelea la care se face comprimarea gazului, adică ciclul să fie parcurs în diagrama $p - v$ în sensul trigonometric negativ. Pentru ca presiunile la destinderea gazului să fie mai mari decît presiunile la comprimarea gazului este necesar ca destinderea gazului să aibă loc la o temperatură mai mare iar comprimarea gazului la o temperatură mai mică. Aceste temperaturi diferite ale gazului pot fi realizate dacă cilindrul cu piston, în care se găsește gazul ce execută procesul ciclic, va fi *în contact termic succesiv cu două rezervoare de căldură.* Un astfel de proces ciclic se numește proces ciclic biterm și bilanțul său energetic se stabilește pe baza legii a doua a termodinamicii.

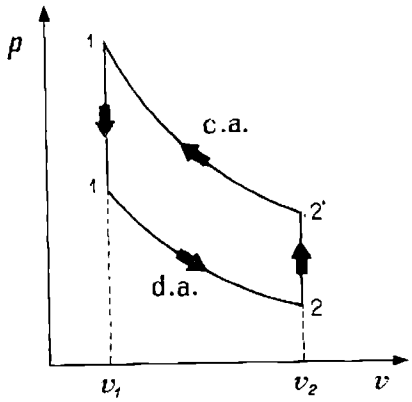


Fig. 11.10. Exemplu de proces ciclic monoterm; 1→2 destindere adiabatică (d.a.), 2→2′ încălzire sub volum constant, 2′→1′ comprimare adiabatică (c.a.), 1′→1 răcire sub volum constant.

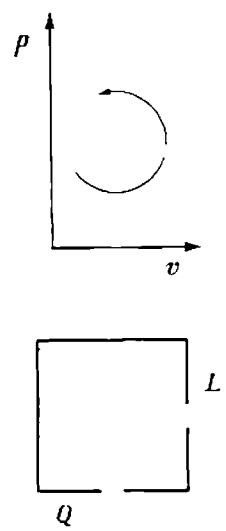


Fig. 11.11. Schematizarea procesului ciclic monoterm prin sensul de parcurgere în diagrama $p - v$ și bilanțul energetic

Capitolul **12**

Legea a doua a termodinamicii

12.1. Ciclul Carnot direct

În capitolul anterior s-a arătat că nu se poate obţine lucru din căldură cu o maşină termică care funcţionează cu un singur rezervor de căldură. Într-un proces ciclic monoterm se realizează doar transformarea lucrului în căldură, nu şi situaţia inversă. Pentru a avea transformarea căldurii în lucru este necesar ca maşina termică să funcţioneze cu două rezervoare de căldură, la temperaturi diferite, aşa cum se va arăta în continuare. Procesul ciclic care are loc într-un corp de pompă în contact succesiv cu două rezervoare de căldură, la temperaturi diferite, se numeşte proces ciclic biterm. Cel mai important proces ciclic biterm este *ciclul Carnot direct.*

De la început trebuie subliniat faptul că ciclul Carnot direct stă la baza funcţionării unei *maşini termice ideale. Maşina termică reală* diferă de cea ideală prin faptul că între piesele în mişcare ale acestei maşini există frecări, ceea ce modifică bilanţul energetic al ciclului de funcţionare. Totuşi, studiul maşinilor termice ideale are ca scop să stabilească condiţiile în care se poate mări *randamentul* unei maşini. Deşi prima maşină termică a fost concepută înainte ca termodinamica să fi fost constituită ca obiect de studiu, stabilirea condiţiilor de creştere a randamentului unei maşini termice reale, adică îmbunătăţirea bilanţului său energetic, s-a putut realiza numai în urma elaborării teoriei proceselor termodinamice şi al studiului maşinilor termice ideale.

Pentru descrierea procesului ciclic Carnot se consideră acelaşi sistem ca cel descris în § 11.7, adică gazul conţinut într-un cilindru cu piston legat de un volant. Deosebirea constă în faptul că cilindrul poate sta succesiv în contact termic cu două rezervoare de căldură, unul mai cald, caracterizat prin temperatura T_c şi altul mai puţin cald, caracterizat prin temperatura T_r ($T_r < T_c$); cele două rezervoare de căldură sînt denumite pe scurt rezervorul cald şi rezervorul rece. Temperaturile celor două rezervoare rămîn constante în tot timpul funcţionării maşinii termice.

Ciclul Carnot direct se compune din patru procese parțiale arătate în figura 12.1. Prima etapă este o destindere a gazului ($1 \rightarrow 2$); cilindrul fiind în contact termic cu rezervorul cald la temperatura T_c, gazul ia căldura Q_c de la rezervorul cald (v. § 11.4), astfel încît această transformare este o *destindere izotermă*. Urmează apoi o destindere rapidă ($2 \rightarrow 3$), proces în care căldura nu are timp să treacă prin perete, ceea ce înseamnă că *destinderea* este *adiabatică* și deci temperatura gazului scade pînă la temperatura rezervorului rece T_r. În a treia etapă se execută o comprimare ($3 \rightarrow 4$) cilindrul fiind în contact termic cu rezervorul rece. Ca urmare, gazul cedează căldura Q_r la temperatura T_r, această transformare fiind o *comprimare izotermă*. În fine procesul ciclic se încheie cu o *comprimare* rapidă și deci *adiabatică*, care aduce gazul la starea inițială, caracterizată prin temperatura T_c, presiunea și volumul indicate în diagrama $p - v$ din figura 12.1.

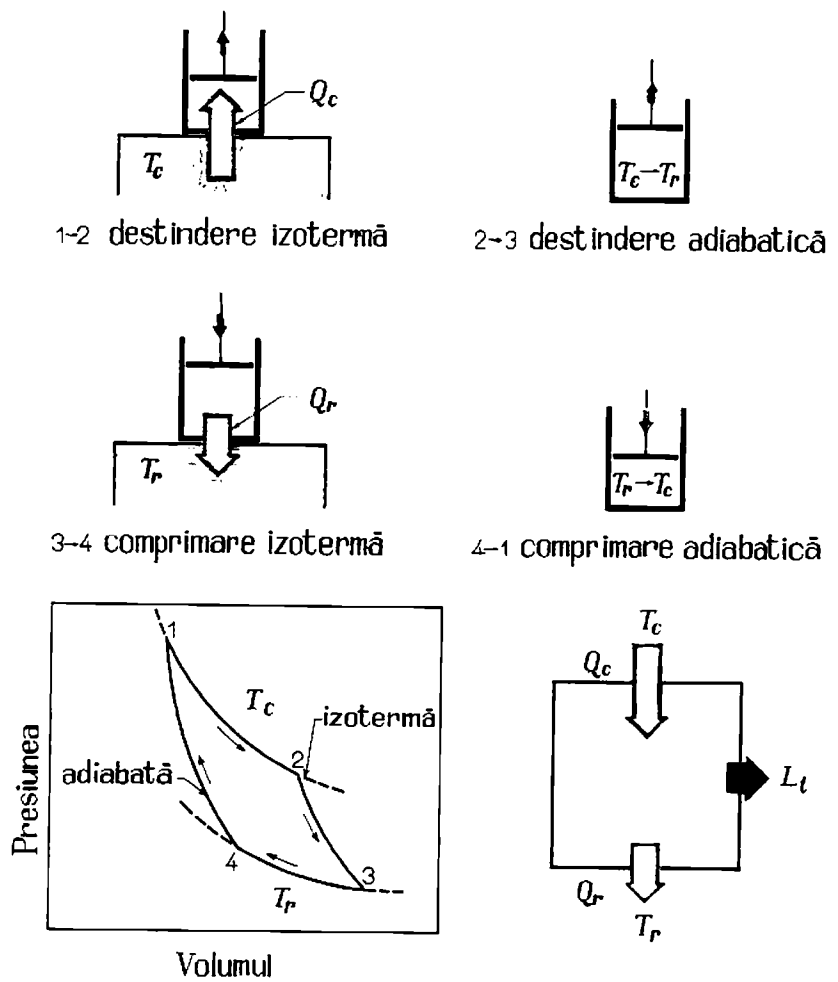


Fig. 12.1. Procesele componente, ordinea proceselor componente și stările caracteristice în diagrama $p-v$, precum și bilanțul energetic pentru ciclul Carnot direct

Lucrul total L_t va fi dat de suma lucrurilor parțiale corespunzătoare celor patru etape. Conform legii întîi a termodinamicii se remarcă faptul că pentru cele două transformări adiabatice lucrurile sînt egale în valoare absolută, dar de semn diferit: la destindere lucrul, fiind cedat de gaz, este pozitiv, pe cînd la comprimare lucrul, fiind primit de gaz, este negativ ($L_{23} = -L_{41}$). Valoarea lor este egală cu $U_c - U_r$, cele două energii interne, U_c și U_r, corespunzînd temperaturilor T_c și T_r. Lucrurile pe izotermele $1 \to 2$ și $3 \to 4$ sînt de semn contrar; primul se referă la o destindere, iar al doilea la o comprimare

$$L_{12} > 0 \qquad L_{34} < 0$$

Așa cum rezultă din figura 12.1, prin compararea ariilor închise de curbele respective, lucrul L_{12} este mai mare în valoare absolută decît lucrul L_{34}

$$|L_{12}| > |L_{34}|$$

Lucrul total al ciclului Carnot direct se scrie

$$L_t = \Sigma L_i = L_{12} - L_{34} > 0$$

Conform acestei inegalități, se conclude că în ciclul Carnot direct lucrul total este pozitiv, adică este cedat de către gaz și deci poate fi transmis unui mecanism exterior.

Căldura totală a procesului ciclic este suma căldurilor din transformările izoterme $1 \to 2$ și $3 \to 4$, deoarece pe adiabate căldurile schimbate de sistem cu rezervoarele de căldură sînt nule. Pe izotermă căldura este egală și de același semn cu lucrul; în cursul transformării $1 \to 2$ căldura Q_c este primită de gaz de la rezervorul cald, $Q_c > 0$, iar în transformarea $3 \to 4$ căldura Q_r este cedată de gaz rezervorului rece, $Q_r < 0$, și deci căldura totală se scrie

$$Q_t = \Sigma Q_i = Q_c - Q_r$$

Aplicînd legea întîi a termodinamicii ciclului Carnot direct se poate scrie

$$L_t = Q_c - Q_r \tag{12.1}$$

Întrucît $L_t > 0$ rezultă $|Q_c| > |Q_r|$. Relația (12.1) este o altă formă de exprimare a conservării energiei: lucrul cedat de gaz este egal cu diferența dintre căldura Q_c primită de gaz de la rezervorul cald și căldura Q_r cedată de gaz rezervorului rece; această diferență reprezintă de fapt căldura care i-a rămas gazului și care s-a transformat în lucru. Altfel spus, numai o parte din căldura preluată de la rezervorul cald, și anume $Q_c - Q_r$ se transformă în lucru; cealaltă parte și anume $Q_r = Q_c - L_t$ este inutilizabilă, deoarece ea nu se transformă în lucru, ci produce doar creșterea de energie a rezervorului rece. Cantitatea de căldură cedată rezervorului rece nu poate fi în nici un caz egală cu zero, așa cum se va arăta mai departe, ceea ce înseamnă că *în natură nu există procese în care căldura se poate transforma integral în lucru.* Totdeauna $L_t < Q_c$ și $Q_r \neq 0$. Scopul unei mașini termice este ca pentru o căldură Q_c dată, mașina să furnizeze un lucru L cît mai mare; aceasta se realizează cu o căldură Q_r, cedată la temperatura T_r, cît mai mică. Condițiile în care această situație se realizează vor fi stabilite în § 12.5. Bilanțul energetic al ciclului Carnot direct redat prin relația (12.1) este schematizat jos în dreapta figurii 12.1. Se observă că în diagrama $p - v$ ciclul Carnot direct este parcurs în sensul trigonometric negativ.

În cazul banal al contactului termic între două corpuri care au temperaturi diferite și cînd nu intervine nici un lucru, relația (12.1) devine $Q_c = Q_r$, adică căldura cedată de corpul cald este egală cu aceea primită de corpul rece.

În încheiere trebuie adăugat că la mașinile termice reale se întîlnesc cicluri de funcționare mai mult sau mai puțin asemănătoare cu ciclul Carnot direct studiat aici. Totuși ciclul Carnot, care descrie funcționarea unei mașini termice ideale, permite să se calculeze randamentul maxim care se poate obține la transformarea căldurii în lucru, așa cum se va arăta mai departe.

12.2. Ciclul Carnot inversat

Ciclul Carnot inversat este procesul ciclic biterm parcurs în diagrama $p - v$ în sensul trigonometric pozitiv. Ciclul Carnot inversat are o mare importanță tehnică, deoarece stă la baza funcționării frigoriferului și a pompei de căldură. În cele ce urmează se vor analiza cele patru transformări din care este compus și apoi se va calcula bilanțul energetic.

Prima etapă a ciclului Carnot inversat este o *destindere izotermă* ($1 \to 2$) a gazului în contact, de astă dată, cu rezervorul rece, astfel încît gazul preia căldura Q_r de la rezervorul rece. Apoi, o *comprimare adiabatică* ($2 \to 3$) ridică temperatura gazului de la temperatura rezervorului rece, T_r, pînă la temperatura T_c a rezervorului cald. Urmează o *comprimare izotermă* ($3 \to 4$) a gazului în contact cu rezervorul cald; la temperatura T_c gazul cedează rezervorului cald căldura Q_c. În fine, o *destindere adiabatică* ($4 \to 1$) aduce gazul la parametrii stării inițiale, așa cum se vede în figura 12.2.

Din diagrama $p - v$ se observă că

$$|L_{12}| < |L_{34}|; \qquad L_{12} > 0; \qquad L_{34} < 0$$

Lucrul total în ciclul Carnot inversat este

$$L_t = L_{12} - L_{34} < 0$$

Lucrul total fiind negativ, conform legii întîi pentru un proces ciclic, rezultă că și căldura totală este negativă, deci $Q_t < 0$. Întrucît căldurile pe adiabate sînt nule, căldura totală va fi dată de suma căldurilor pe izoterme care pot fi scrise folosind legea întîi pentru procesele izoterme.

Pe izoterma $1 \to 2$:

$$Q_r = L_{12}; \qquad Q_r > 0$$

pe izoterma $3 \to 4$:

$$Q_c = L_{34}; \qquad Q_c < 0$$

$$Q_t = \Sigma Q_t$$

Deoarece $|L_{12}| < |L_{34}|$ rezultă și că $|Q_r| < |Q_c|$; pe de altă parte s-a arătat că Q_t este negativ. Această situație a semnelor și valorilor căldurilor impune să se scrie căldura totală sub forma

$$|Q_t| = |Q_c| - |Q_r|$$

deoarece în valoare absolută Q_c este totdeauna mai mare decît Q_r. Bilanțul energetic al ciclului Carnot inversat va fi

$$|L_t| = |Q_c| - |Q_r| \qquad (12.2)$$

În multe cărți, relația (12.2) se scrie ca relație între valori absolute, deoarece în această formă se folosește în aplicații și în calcule

$$L_t = Q_c - Q_r \tag{12.2'}$$

Bilanțul energetic redat de relația (12.2) sau de (12.2') este reprezentat schematic în figura 12.2. Se remarcă că expresia matematică a bilanțului energetic al ciclului Carnot inversat este asemănătoare cu aceea din cazul ciclului Carnot direct [v. relația (12.1)]. Deosebirea între cele două relații constă în faptul

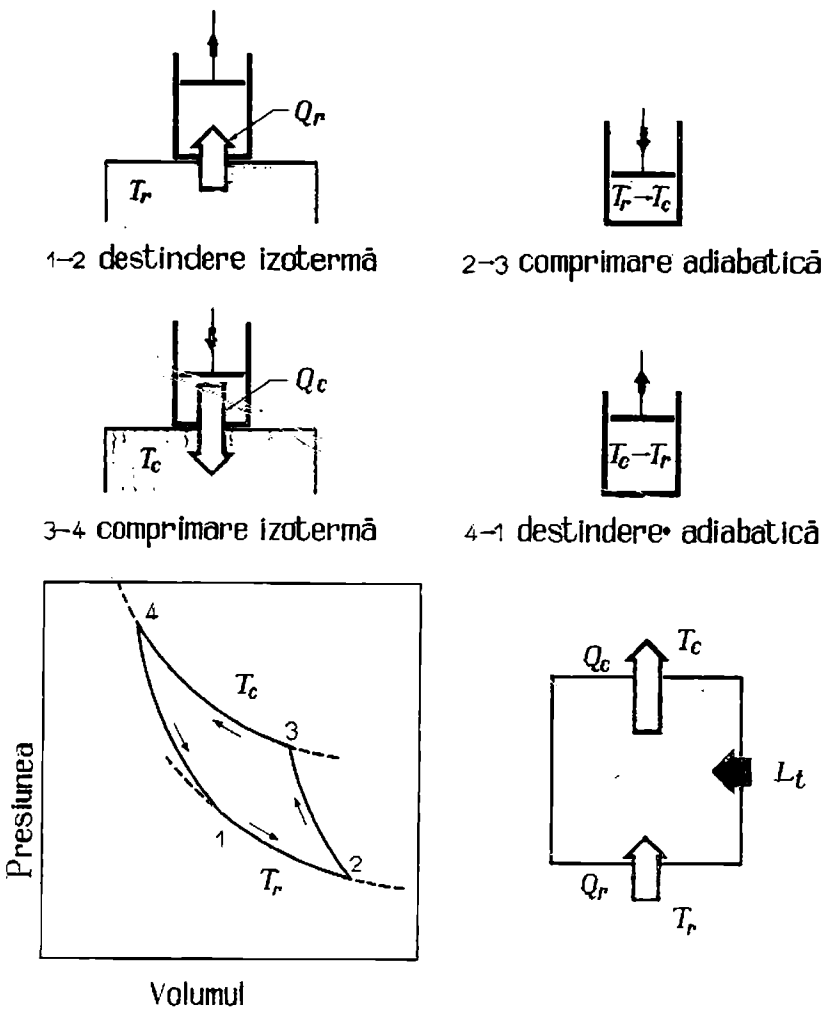


Fig. 12.2. Procesele componente, ordinea proceselor componente și stările caracteristice în diagrama $p - v$, precum și bilanțul energetic pentru ciclul Carnot inversat.

că fiecare din mărimile L_t, Q_c și Q_r au semnul schimbat într-o relație față de cealaltă. Această schimbare de semn nu este numai formală, ci exprimă faptul că cele două relații se referă la fenomene diferite: în ciclul Carnot direct prin trecerea căldurii de la rezervorul cald la cel rece o parte din căldură se transformă în lucru, pe cînd în ciclul Carnot inversat căldura trece de la rezervorul rece la cel cald gazul absorbind, pentru aceasta, lucru din exterior.

În ciclul Carnot inversat are loc un proces care nu se întîmplă spontan în natură și anume, trecerea căldurii de la o temperatură joasă la o temperatură mai ridicată. În natură energia calorică trece spontan de la o temperatură înaltă la una mai coborîtă. În ciclul Carnot inversat are loc un fenomen invers celui pe care îl găsim în natură, dar această trecere a căldurii de la temperatura joasă la una mai ridicată se face cu ajutorul lucrului L_t primit de sistem din exterior. Pe seama acestui lucru sistemul preia de la rezervorul rece căldura Q_r și cedează la rezervorul cald căldura $Q_c = L_t + Q_r$.

Ciclul Carnot inversat stă la baza frigoriferului care preia căldură de la rezervorul rece (camera de răcire) și o transmite rezervorului cald, care este de obicei mediul ambiant.

12.3. Relația între Q_c, Q_r, T_c și T_r

Pentru cele ce urmează interesează relația între căldurile Q_c și Q_r, schimbate de gaz cu rezervoarele de căldură și temperaturile, T_c și T_r, ale rezervoarelor de căldură, în ciclul Carnot. Așa cum se va arăta, relația are aceeași formă atît pentru ciclul Carnot direct cît și pentru ciclul Carnot inversat.

În ciclul Carnot direct, (fig. 12.1), pe izotermă lucrul efectuat de gaz este egal cu căldura schimbată cu rezervorul de căldură; lucrul se va scrie sub forma

$$L = \int_{v'}^{v''} p \cdot dv = \nu R T \ln \frac{v''}{v'}$$

unde v' este volumul inițial și v'' este volumul final. Ca urmare, în trecerea *1 — 2*, căldura Q_c este

$$Q_c = \nu R T_c \ln \frac{v_2}{v_1}$$

Pentru trecerea $3 \rightarrow 4$, lucrul fiind negativ, se va scrie valoarea sa absolută

$$L_{34} = \nu R T_r \ln \frac{v_3}{v_4}$$

lăsînd sub logaritmul natural raportul între volumul inițial și cel final, astfel încît logaritmul să fie pozitiv. Valoarea absolută a căldurii Q_r este

$$Q_r = \nu R T_r \ln \frac{v_3}{v_4}$$

Ecuațiile de transformare pentru cele două adiabate, conform relației (11.9), sînt

$$T_c \cdot v_2^{\gamma-1} = T_r \cdot v_3^{\gamma-1}$$

$$T_r \cdot v_4^{\gamma-1} = T_c \cdot v_1^{\gamma-1}$$

ceea ce conduce la

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1}{v_4}; \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}$$

Aceste egalităţi arată că logaritmii din expresiile căldurilor Q_c şi Q_r sînt egali şi deci

$$\frac{Q_c}{Q_r} = \frac{T_c}{T_r} \qquad (12.3)$$

Nu trebuie uitat că Q_r, în această relaţie, reprezintă valoarea absolută a căldurii respective!

Scriind expresiile căldurilor pe izoterme şi apoi ecuaţiile de transformare pe adiabate pentru ciclul Carnot inversat se ajunge exact la aceeaşi expresie, unde Q_c şi Q_r reprezintă valorile absolute ale celor două călduri.

Relaţia (12.3) constituie esenţa termodinamicii şi este de fapt exprimarea matematică a legii a doua a termodinamicii: *raportul căldurilor schimbate de gaz cu cele două rezervoare de căldură este egal cu raportul temperaturilor rezervoarelor de căldură, în ciclul Carnot.*

Pentru înţelegerea relaţiei (12.3) vom da două exemple, unul referitor la o maşină termică ca aplicaţie a ciclului Carnot direct şi celălalt referitor la un frigorifer ca aplicaţie la ciclul Carnot inversat.

Astfel, dacă o maşină termică lucrează între temperaturile $T_r = 300$ K şi $T_c = 600$ K, atunci raportul căldurilor Q_c/Q_r este egal cu doi. Aceasta înseamnă că dacă rezervorul cald dă $Q_c = 1\,000$ J pe o anumită durată, atunci rezervorul rece trebuie să primească 500 J pe aceeaşi durată. Din expresia (12.1) rezultă că lucrul efectuat de maşina termică, presupusă ideală, este 500 J, pe aceeaşi durată. Pentru ca lucrul efectuat de maşina termică să fie mai mare, de exemplu 1 000 J, este necesar ca corpul de pompă să preia o căldură Q_c, mai mare, de exemplu 2 000 J, pentru aceeaşi durată. Pentru menţinerea raportului $Q_c/Q_r = 2$, trebuie ca Q_r să fie 1 000 J. Se realizează un lucru mai mare, însă aceasta se face cu un Q_r mai mare, ceea ce ridică costul energiei obţinute.

În cazul unui frigorifer care trebuie să menţină o incintă la $T_r = 150$ K faţă de mediul ambiant, a cărei temperatură este $T_c = 300$ K, rezultă că unei călduri Q_r luate de rezervorul rece îi corespunde căldura $Q_c = 2\,Q_r$ cedată rezervorului cald. Lucrul necesar pentru această operaţie este impus prin relaţia (12.2) şi anume în acest caz $L_t = Q_c - Q_r = 2Q_r - Q_r = Q_r$. În § 12.6 se va reveni asupra calculului lucrului necesar funcţionării unui frigorifer.

În fine, această importantă relaţie se mai scrie sub forma

$$\frac{Q_c}{T_c} = \frac{Q_r}{T_r}$$

cu alte cuvinte, raportul între căldura schimbată de gaz la un rezervor de căldură şi temperatura rezervorului respectiv rămîne constant pentru ciclul Carnot, direct sau inversat. Aceasta este o ecuaţie de bază a termodinamicii şi va fi folosită în cele ce urmează.

12.4. Enunțul legii a doua a termodinamicii

Legea întîi a termodinamicii exprimă conservarea energiei în cursul unei transformări a unui sistem termodinamic, transformare în care intervine lucrul L căldura Q și o anumită variație a energiei interne U. Dar această lege nu răspunde la problema practică foarte importantă a termodinamicii *obținerea lucrului de la o mașină termică.*

Pentru procesele ciclice care stau la baza funcționării mașinilor termice, legea întîi a termodinamicii afirmă că

$$L_t = Q_t$$

fără a preciza nimic despre modul și sensul de transformare al lucrului și al căldurii, adică cît și cum se transformă lucrul în căldură sau căldura în lucru. Or, în natură nu este posibilă oricum transformarea

$$\text{lucru} \rightleftharpoons \text{căldură}$$

Astfel în mecanică se știe că în fenomenul de frecare are loc transformarea lucrului în căldură și că această transformare se poate face integral, adică frecarea poate opri complet mișcarea unui corp, ceea ce înseamnă că lucrul efectuat din exterior asupra corpului pentru a-l pune în mișcare este transformat integral în căldură. Prin urmare, *lucrul se poate transforma integral în căldură,* dar s-a arătat însă că *nu se poate transforma integral căldura în lucru.* Cît și cum se transformă căldura în lucru? Răspunsul la această întrebare îl dă legea a doua a termodinamicii.

Legat de transformarea căldurii în lucru este schimbul căldurii între corpuri cu temperaturi diferite sau, în limbajul termodinamic, între rezervoare de căldură. În natură trecerea căldurii de la temperatură mai ridicată la temperatură mai coborîtă este spontană, dar nu există o trecere spontană a căldurii în sens invers. Totuși este necesară „răcirea unui corp rece", adică trecerea unei călduri de la o temperatură mai coborîtă la o temperatură mai ridicată, cum este cazul frigoriferului. Cum se poate face această trecere a căldurii în sens invers? Tot legea a doua a termodinamicii trebuie să răspundă și la această întrebare.

Procesele ciclice studiate sînt procese idealizate, în care frecarea nu există, adică s-a presupus că mișcarea pistonului în cilindru se face fără frecare. Asemenea mișcări mecanice sînt *reversibile.* De exemplu, un pendul se va mișca nedefinit în timp dacă nu există frecarea pendulului cu aerul și dacă nu există frecare în firul de suspensie; în acest caz, mișcările sale ar fi reversibile. Dacă o bilă este lăsată să se rostogolească pe peretele interior al unui recipient sferic, ea se va ridica tot prin rostogolire pe peretele său, pînă la aceeași înălțime, dacă lipsește frecarea: fenomenul ar fi reversibil. Însă din cauza frecării fenomenele sînt ireversibile. Totuși, studiul fenomenelor reversibile permite deducerea randamentului unei mașini termice. În fenomenele care au loc în cursul efectuării ciclului Carnot se consideră că mișcarea pistonului în cilindru se face fără frecare și, deci, procesele respective sînt considerate *procese reversibile.* În termodinamică sînt interesante procesele ciclice reversibile pentru care se enunță legile fundamentale.

Legea a doua a termodinamicii răspunde la cele două întrebări de mai sus, răspunsurile constituind tocmai enunțul legii:

Într-un proces ciclic reversibil în care are loc transformarea căldurii în lucru, aceasta nu se transformă integral, ci totdeauna o parte din căldura preluată de la rezervorul cu temperatura mai ridicată trece la rezervorul cu temperatura mai coborîtă, fără a fi utilizabilă.

Într-un proces ciclic reversibil în care o cantitate de căldură trece de la un rezervor de căldură cu temperatura mai coborîtă la un rezervor cu temperatura mai ridicată, este absolut necesar să se consume lucru; acest lucru trece ca energie calorică la rezervorul cu temperatura mai ridicată.

Această enunțare trebuie completată cu relația între căldurile Q_c, Q_r și temperaturile celor două rezervoare de căldură, T_c și T_r,

$$\frac{Q_c}{Q_r} = \frac{T_c}{T_r} \tag{12.3}$$

precum și cu schemele bilanțurilor energetice ale proceselor ciclice reversibile, scheme care conțin valorile absolute ale lucrului L și ale căldurilor Q_c și Q_r (v. figurile 12.1 și 12.2).

Din enunțarea legii a doua a termodinamicii rezultă concluziile:

— energia calorică nu se poate transforma integral în lucru;

— energia calorică nu poate trece spontan de la temperatură mai coborîtă la temperatură mai ridicată.

Prima consecință practică a legii a doua este că o mașină termică, chiar reversibilă, nu poate funcționa decît cu două rezervoare de căldură care au temperaturi diferite, luînd căldură de la rezervorul cald și restituind o parte din această căldură rezervorului rece. Deci, nu se poate imagina vreo mașină termică care să funcționeze în aerul cald sau în nisipul Saharei (adică cu un singur rezervor de căldură!), oricît de fierbinte ar fi acesta; este necesar să se dispună de un rezervor rece care să permită eliminarea unei cantități de căldură. A doua consecință practică este că nu se poate răci un recipient decît consumînd lucru. Astfel orice frigorifer are nevoie de lucru care permite trecerea căldurii de la rezervorul rece la rezervorul cald. Pentru a răci o încăpere în timpul verii, sub temperatura mediului ambiant este necesar lucru, care preia căldură din încăpere și o elimină la temperatura mai ridicată a mediului exterior, care are o temperatură mai ridicată.

12.5. **Teorema lui Carnot**

Randamentul unei mașini termice reversibile este definit ca raportul dintre lucrul L efectuat și căldura Q_c preluată de la rezervorul cu temperatura T_c. O mașină termică este cu atît mai avantajoasă cu cît produce un lucru L mai mare pentru o aceeași căldură Q_c. Ca urmare randamentul η al unei mașini termice reversibile are expresia

$$\eta \equiv \frac{L}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_r}{Q_c} = 1 - \frac{Q_r}{Q_c}$$

Folosind ecuația de bază a termodinamicii (12.3) se obține

$$\eta = 1 - \frac{T_r}{T_c} = \frac{T_c - T_r}{T_c} \tag{12.4}$$

Teorema lui Carnot afirmă că *randamentul unei mașini termice reversibile este funcție numai de temperaturile celor două rezervoare de căldură și nu depinde de natura gazului care suferă procesul ciclic respectiv.*

Relația de mai sus arată, pe de o parte, că randamentul este totdeauna mai mic decît unitatea și, pe de altă parte, că randamentul crește cu diferența $T_c - T_r$, dintre cele două temperaturi. Prin urmare, la un T_r dat, care este de obicei temperatura mediului ambiant, pentru ca randamentul să fie cît mai mare, trebuie ca temperatura rezervorului cald să fie cît mai ridicată. În fine, din relația (12.4) se observă că randamentul tinde către unitate dacă $T_c \to \infty$ sau dacă $T_r \to 0$, ambele condiții fiind irealizabile.

Se mai poate spune că randamentul mașinii termice reversibile reprezintă fracțiunea maximă din căldura primită de la rezervorul cald care se transformă în lucru, $L = \eta Q_c$.

Mașinile termice reale sînt ireversibile, deoarece prin mișcarea diferitelor părți ale mașinii o parte din lucru se transformă în căldură prin frecare. Ca urmare lucrul real L' efectuat de mașina termică, cînd există frecare, va fi mai mic decît lucrul L, efectuat cînd nu există frecare. În consecință, se va defini randamentul real η' cu ajutorul lucrului real L'

$$\eta' \equiv \frac{L'}{Q_c} \tag{12.5}$$

Deoarece $L' < L$, rezultă $\eta' < \eta$, adică randamentul unei mașini reale (ireversibile) este mai mic decît randamentul mașinii reversibile, care lucrează între aceleași temperaturi, T_c și T_r.

La mașinile cu aburi, randamentul este mic din cauza diferenței mici dintre temperatura aburului ($T_c = 100°C = 373$ K) și temperatura de condensare a vaporilor ($T_r = 27°C = 300$ K). Cu aceste valori se calculează $\eta = 0{,}24$; pe cînd în practică din cauza ireversibilității $\eta' \cong 0{,}12$. Abia prin supraîncălzirea aburului la $T_c = 727°C = 1\,000$ K și eventuala răcire a condensatorului la $T_r = 17°C = 290$ K se poate realiza un randament mai mare. Prin calcul $\eta = 0{,}72$, iar valoarea obținută la mașinile termice reale este cel mult $\eta' \cong 0{,}36$. La motoarele cu ardere internă, explozia încălzește gazele la cca $T_c = 2\,000°C = 2\,273$ K, iar răcirea este asigurată la temperatura de fierbere a apei, $T_r = 100°C = 373$ K. De astă dată se calculează $\eta = 0{,}80$ și se obține practic $\eta' \cong 0{,}40$.

12.6. Aplicarea ciclului Carnot inversat

Ciclul Carnot inversat are două aplicații foarte utile: frigoriferul și pompa de căldură. Frigoriferul întreține într-o incintă o temperatură T_r mai coborîtă decît temperatura T_c a mediului ambiant. Instalațiile frigorifice sînt necesare în aproape toate ramurile industriale; astfel, de exemplu, în industria alimentară la conservarea alimentelor sau în tehnica construcțiilor la înghețarea terenurilor în timpul unor anumite lucrări. Pompa de căldură întreține într-o încăpere o temperatură T_c mai ridicată decît temperatura T_r a mediului ambiant. Pompa de căldură servește la încălzirea clădirilor, halelor industriale etc., dar face aceasta luînd căldura Q_r de la un rezervor rece (T_r), prin intermediul unui lucru primit din exterior, așa cum se va vedea mai departe. Pompa de căldură are aceeași întrebuințare ca și caloriferul, adică sînt folo-

site pentru încălzirea încăperilor, cu deosebirea că pompa de căldură este mult mai avantajoasă din punct de vedere energetic și deci economic, așa cum va rezulta din aplicația de la sfîrșitul acestui paragraf.

Atît frigoriferul cît și pompa de căldură preiau căldură de la rezervorul rece și o transferă rezervorului cald, evident cu ajutorul unui lucru; deosebirea între aceste instalații este că frigoriferul „răcește rezervorul rece" care primește spontan căldură de la mediul ambiant, iar pompa de căldură „încălzește rezervorul cald" care pierde spontan căldură către mediul ambiant. Mediul ambiant este rezervor cald pentru frigorifer și rezervor rece pentru pompa de căldură.

Coeficientul de putere ζ al frigoriferului reversibil este definit ca raportul între lucrul L, necesar pentru a prelua căldura Q_r de la rezervorul rece, și căldura Q_r

$$\zeta \equiv \frac{L}{Q_r} = \frac{Q_c - Q_r}{Q_r} = \frac{Q_c}{Q_r} - 1 = \frac{T_c}{T_r} - 1 = \frac{T_c - T_r}{T_r}$$

Frigoriferul real (ireversibil) va avea un coeficient de putere mai mare decît frigoriferul reversibil, dar analiza frigoriferului reversibil permite să se calculeze, la limită, lucrul $L = \zeta Q_r$ necesar pentru funcționarea sa.

Din expresia de mai sus rezultă că coeficientul de putere al frigoriferului depinde de diferența $T_c - T_r$. Pentru a menține o incintă la 0°C este cu atît mai ușor (ζ mic și deci L mic) cu cît T_c este mai mic, adică este mai ușor să se producă gheață în condițiile de temperatură ale țării noastre decît la ecuator, pentru că la noi temperatura mediului ambiant este mai mică decît aceea de la ecuator.

Dacă $T_r = 0$ K, rezultă $\zeta \to \infty$ și deci $L \to \infty$; este, deci, imposibil de a ajunge la 0 K cu ajutorul unei instalații bazată pe principiul frigoriferului.

Aplicație.

Dacă se produce gheață ($T_r = 0°C = 273$ K) cu două frigorifere aflate în două regiuni unde mediul ambiant are temperaturi diferite, și anume

$$T_{c,1} = 20°C = 293 \text{ K} \qquad T_{c,2} = 50°C = 323 \text{ K}$$

rezultă pentru coeficientul de putere al frigoriferului valorile

$$\zeta_1 = \frac{293 - 273}{273} = 0{,}07 \qquad \zeta_2 = \frac{323 - 273}{273} = 0{,}2$$

Căldura de solidificare pentru 1 kg gheață este 330 kJ și, deci, dacă $Q_r = 330$ kJ sînt necesare lucrurile

$$L_1 = \zeta_1 Q_r = 22 \text{ kJ} \qquad L_2 = \zeta_2 \cdot Q_r = 66 \text{ kJ}$$

Bilanțul energetic al celor două frigorifere este arătat în figura 12.3, unde s-a indicat și $Q_c = L + Q_r$.

În cazul frigoriferului căldura Q_c cedată rezervorului cald poate avea ca efect ridicarea temperaturii rezervorului cald dacă acesta nu are dimensiuni suficient de mari; creșterea temperaturii T_c are ca efect creșterea coeficientului de putere și deci a lucrului L. De aceea, la frigoriferele mari este

necesară o circulație de apă care să mențină rezervorul cald la o temperatură constantă; altfel spus, apa care circulă îndepărtează căldura Q_c eliminată de frigorifer. La frigoriferele mici căldura Q_c este disipată în mediul ambiant.

Coeficientul de putere ξ al pompei de căldură reversibile este definit ca raportul între lucrul L, necesar pompei de căldură pentru a ceda căldura Q_c la rezervorul cald, și căldura Q_c

$$\xi \equiv \frac{L}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_r}{Q_c} = 1 - \frac{Q_r}{Q_c} = 1 - \frac{T_r}{T_c} = \frac{T_c - T_r}{T_c}$$

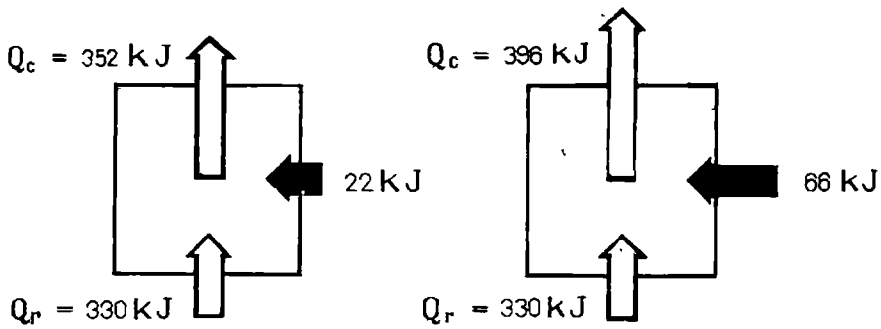


Fig. 12.3. Bilanțul energetic pentru două frigorifere reversibile care produc aceeași cantitate de gheață, lucrînd la temperaturile ambiante de 20°C și respectiv 50°C

Pompa de căldură reală (ireversibilă) va avea un coeficient de putere mai mare decît pompa de căldură reversibilă, dar studiul pompei de căldură reversibile va arăta avantajul încălzirii unei incinte cu pompa de căldură, față de încălzirea convențională, de exemplu caloriferul.

Întrucît $\xi < 1$ (deoarece $T_c - T_r < T_c$) rezultă că lucrul L necesar pentru a duce căldura Q_c la rezervorul cald, $L = \xi Q_c$, este totdeauna mai mic decît căldura Q_c. Prin urmare în loc să se folosească direct căldura Q_c pentru încălzire, se consumă lucrul $L < Q_c$, care preia căldura Q_r de la un rezervor rece (apa unui lac sau a unui rîu) și redă apoi la temperatura ridicată căldura $Q_c = L + Q_r$. În aceasta constă avantajul pompei de căldură.

În plus, se remarcă faptul că coeficientul de putere este cu atît mai mic, și deci lucrul L necesar este mai mic, cu cît diferența $T_c - T_r$ este mai mică, adică este avantajos să se folosească pompa de căldură la un sistem de încălzire cu temperatură joasă, de exemplu, încălzirea prin radiație. La încălzirea prin radiație apa care circulă în elementele radiante are doar 40°C, pe cînd caloriferul are nevoie de apă la 80°C.

Aplicație.

Se presupune utilizarea pompei de căldură pentru încălzirea la $T_{c_1} = 80$°C a apei pentru un sistem de încălzire asemănător caloriferului sau la $T_{c_2} = 40$°C a apei pentru un sistem de încălzire prin radiație; în ambele cazuri se folosește apa rece a unui rîu care are temperatura $T_r = 2$°C = 275 K.

Coeficientul de putere al pompei de căldură reversibilă pentru cele două cazuri va fi

$$T_{c,1} = 80 + 273 = 353 \text{ K} \qquad T_{c,2} = 40 + 273 = 313 \text{ K}$$

$$\xi_1 = \frac{353 - 275}{353} = 0{,}20 \qquad \xi_2 = \frac{313 - 275}{313} = 0{,}12$$

Dacă, spre exemplu, pentru încălzirea unei încăperi este necesară căldura $Q_c = 10$ kJ atunci lucrul consumat de pompa de căldură în cele două cazuri se poate scrie

$$L_1 = \xi_1 \cdot Q_c = 2 \text{ kJ} \qquad L_2 = \xi_2 \cdot Q_c = 1{,}2 \text{ kJ}$$

Cu aceste valori bilanțul energetic este acela din figura 12.4, unde s-a notat și căldura $Q_r = Q_c - L$.

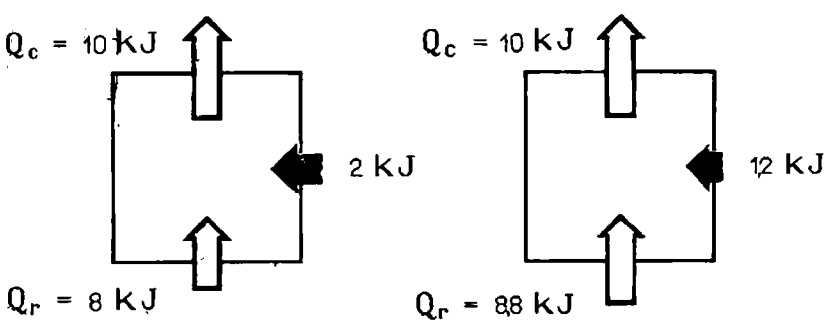


Fig. 12.4. Bilanțul energetic pentru două pompe de căldură reversibile care încălzesc cu aceeași putere apă caldă, prima la 80°C și a doua la 40°C

În expresiile de mai sus se poate utiliza puterea exprimată în wați în locul lucrului și căldurii exprimate în jouli. Astfel, în primul caz, pompa de căldură consumă puterea de 2 kW pentru a lua de la rezervorul rece puterea de 8 kW și a încălzi încăperea cu puterea de 10 kW. Puterea consumată este preluată de la rețeaua electrică, pentru a acționa electromotorul unei pompe prin care se produce circulația gazului în vederea realizării ciclului Carnot inversat. Avantajul pompei de căldură este că, în loc să se folosească puterea de 10 kW de la rețeaua electrică pentru încălzirea directă, se ia numai 2 kW de la rețeaua electrică care acționează electromotorul pompei de căldură, restul puterii se ia de la rezervorul rece ale cărei dimensiuni trebuie să fie suficient de mari. Dacă rezervorul rece este de dimensiuni mici, preluarea căldurii Q_r poate duce la micșorarea temperaturii T_r, ceea ce are ca efect mărirea coeficientului de putere ξ; acest lucru trebuie evitat.

12.7. Entropia

Se presupun două mașini termice, una reversibilă și alta ireversibilă, ambele funcționînd după ciclul Carnot direct, între aceleași temperaturi T_c și T_r. Dimensiunile celor două mașini se aleg astfel, încît ambele să ia aceeași căldură Q_c de la rezervorul cald. L este lucrul efectuat de mașina reversibilă și L' este lucrul efectuat de mașina ireversibilă; datorită frecărilor din a doua mașină $L' < L$. Expresiile celor două lucruri sînt

$$L = Q_c - Q_r; \qquad L' = Q_c - Q'_r.$$

Deoarece $L \neq L'$ şi Q_c este acelaşi, căldura cedată rezervorului rece trebuie să difere de la o maşină la alta. Întrucît $L' < L$ rezultă din relaţiile de mai sus $Q'_r > Q_r$. La maşina termică ireversibilă se cedează rezervorului rece mai multă căldură, deoarece o parte a lucrului şi anume $L - L'$ se transformă, datorită frecării, în căldură care ajunge tot la rezervorul rece.

Inegalitatea obţinută pentru maşina ireversibilă, $Q'_r > Q_r$ se poate scrie sub forma $Q'_r/T_r > Q_r/T_r$. Conform ecuaţiei de bază a termodinamicii (12.3), al doilea membru al inegalităţii este egal cu Q_c/T_c.

Pe baza consideraţiilor făcute pentru cele două maşini termice, care funcţionează între temperaturile T_c şi T_r, se poate scrie

$$\text{Ciclul reversibil} \quad \frac{Q_r}{T_r} = \frac{Q_c}{T_c}$$

$$\text{Ciclul ireversibil} \quad \frac{Q'_r}{T_r} > \frac{Q_c}{T_c}$$

Se introduce noţiunea de *entropie* S a cărei variaţie, ΔS, într-un anumit proces se defineşte ca raportul între cantitatea de căldură Q schimbată de sistem cu rezervorul de căldură şi temperatura T a rezervorului, care este temperatura la care are loc schimbul de căldură,

$$\Delta S \equiv \frac{Q}{T}$$

Într-un anumit proces pe care îl suferă un sistem, variaţia totală a entropiei sistemului este egală cu suma variaţiilor entropiei pentru toate corpurile care compun sistemul. În ceea ce priveşte semnul cantităţii de căldură Q, se va folosi convenţia dată în § 11.1 şi anume $Q > 0$ pentru căldura primită de corp şi $Q < 0$ pentru căldura cedată de corp. Înainte de a calcula variaţia entropiei pentru ciclul Carnot se prezintă două exemple mai simple, pentru calculul entropiei, în fenomenul frecării şi în cazul calorimetrului.

Exemplul 1. Un sistem execută lucrul L, dar din cauza frecării acesta se transformă în căldura Q, astfel că $Q = L$. Căldura rezultată este primită de sistem deci $Q > 0$. Dacă sistemul are dimensiuni suficient de mari temperatura sa T rămîne practic constantă; în aceste condiţii variaţia entropiei este

$$\Delta S = \frac{Q}{T} > 0$$

Se remarcă faptul că la frecare entropia sistemului creşte cu Q/T. În fenomenul frecării variaţia entropiei este pozitivă.

Exemplul 2. O bucată de metal care are temperatura T_c se introduce într-un calorimetru a cărui apă are temperatura T_r mai coborîtă decît temperatura metalului. Metalul cedează apei căldura Q la o temperatură T'_c cuprinsă între T_c şi T_r; temperatura T'_c este mai mare decît T_r şi mai mică decît T_c.

Apa din calorimetru primește căldura Q, la temperatura T_r. Variația entropiei metalului este $-Q/T_c'$, iar aceea a apei este $+Q/T_r$. Deoarece $T_r < T_c'$ se poate scrie

$$\left|\frac{Q}{T_r}\right| > \left|\frac{Q}{T_c'}\right|$$

Variația totală a entropiei sistemului este

$$\Delta S = \frac{Q}{T_r} - \frac{Q}{T_c} > 0$$

Rezultă că entropia sistemului crește. Acest rezultat se aplică ori de cîte ori două corpuri la temperaturi diferite sînt puse în contact.

Exemplul 3. Variația totală a entropiei într-un ciclu Carnot va fi dată de suma variațiilor entropiei celor trei corpuri care participă în procesul ciclic: rezervorul cald, rezervorul rece și gazul din cilindrul cu piston. Variația entropiei gazului care suferă ciclul este zero, deoarece acesta revine la starea inițială după parcurgerea ciclului. Pentru corpul reprezentat prin rezervorul cald, Q_c este căldura cedată și ca urmare ea este negativă ($Q_c < 0$), iar pentru corpul reprezentat prin rezervorul rece, Q_r este căldura primită și ca urmare ea este pozitivă ($Q_r > 0$). Cu aceste considerații se poate scrie, pentru ciclul reversibil

$$\Delta S = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_r}{T_r} = 0$$

și pentru ciclul ireversibil

$$\Delta S = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_r'}{T_r} > 0$$

Din aceste relații se poate conclude că variația entropiei este nulă în procesul ciclic reversibil și este pozitivă în procesul ciclic ireversibil.

Concluzie. Din calculele făcute rezultă că entropia rămîne constantă ($\Delta S = 0$) într-un proces termodinamic ideal, în care frecarea lipsește, și crește ($\Delta S > 0$) în procesul termodinamic real în care există frecare. Cu alte cuvinte, la trecerea căldurii de la rezervorul cald la rezervorul rece într-o mașină termică reală are loc creșterea entropiei așa cum se întîmplă atît în fenomenul frecării, cît și în cazul calorimetrului.

Considerațiile făcute în acest paragraf au permis să se stabilească o proprietate fundamentală a proceselor termodinamice reale: *entropia crește continuu*. Legea întîi a termodinamicii afirmă că într-un sistem izolat, diferitele transformări se fac astfel încît energia totală a sistemului rămîne constantă, iar legea a doua a termodinamicii conduce la concluzia că în aceste transformări entropia sistemului crește continuu. Pînă cînd crește entropia unui sistem? Pînă la egalizarea temperaturilor, deoarece fără lucru din exterior (sistemul este izolat) căldura nu poate trece decît de la o temperatură mai ridicată la una mai coborîtă.

Capitolul **13**

Oscilații și unde

13.1. Oscilații și oscilatori

În natură se întîlnesc foarte multe tipuri de mișcări oscilatorii, numite pe scurt oscilații. Oscilația este localizată în spațiu, spre deosebire de undă, care constituie tocmai propagarea oscilațiilor în spațiu. Oscilația unui sistem oscilant — a unui oscilator — este descrisă de expresia binecunoscută (2.14)

$$y = A \cos (\omega t + \varphi) \tag{13.1}$$

Oscilația se datorește celor două proprietăți intrinseci ale oscilatorului:
— forța de revenire
— inerția
ale căror „acțiuni" asupra oscilatorului sînt opuse. Forța de revenire este nulă cînd oscilatorul este în poziția de echilibru, și se opune mișcării lui atunci cînd oscilatorul este în altă poziție decît în aceea de echilibru. Inerția oscilatorului se opune forței de revenire și este maximă cînd oscilatorul trece prin poziția de echilibru. Cu ajutorul accelerației dată de expresia (2.16) se poate scrie expresia generală a forței de revenire F

$$F = ma = -m\omega^2 y \tag{13.2}$$

unde m este masa oscilatorului.

Clasificarea oscilatorilor se face din punctul de vedere al naturii forței de revenire, iar clasificarea oscilațiilor se face atît din punctul de vedere al formei ecuației care o reprezintă matematic, cît și din punctul de vedere al excitației exterioare.

Clasificarea oscilatorilor. După natura forței de revenire, care este o forță fundamentală, oscilatorii se pot clasifica astfel:

— oscilatorul elastic, a cărui forță de revenire este o forță elastică, de exemplu, lama elastică, resortul, coarda vibrantă etc.;

— oscilatorul gravitațional, la care forța de revenire este o forță gravitațională; de exemplu, pendulul;

— oscilatorul electric, la care forța de revenire este o forță electrică; de exemplu, electronul în atom, electronul în circuitul oscilant LC etc.

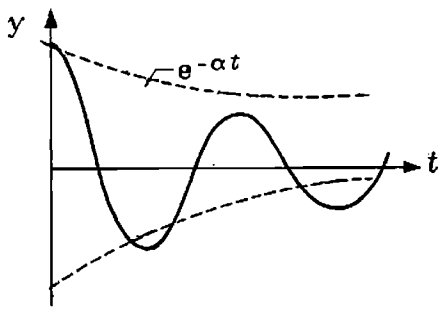


Fig. 13.1. Reprezentarea grafică a oscilației armonice amortizată exponențial în timp.

Oscilații libere. Un oscilator intră în oscilație sub acțiunea unei excitații exterioare. Lăsat să oscileze, fără a mai exista nici o influență din exterior, oscilatorul execută oscilații libere numite în unele cărți *oscilații naturale.* Oscilațiile libere se caracterizează printr-o perioadă T_0 numită *perioadă proprie* a cărei expresie este

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu_0} \tag{13.3}$$

ω_0 este pulsația proprie și ν_0 este frecvența proprie. Perioada proprie depinde numai de proprietățile intrinseci ale oscilatorului. Astfel, de exemplu, perioada proprie a unei coarde de pian este în funcție de materialul din care este confecționată, de grosimea și de lungimea sa.

Oscilații amortizate. Observate un timp suficient de lung oscilațiile libere se micșorează, adică amplitudinea lor scade în timp. Aceste oscilații se numesc *amortizate* și pot fi descrise prin expresia

$$y = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{13.4}$$

unde $e^{-\alpha t}$ arată scăderea amplitudinii în timp.
Relația (13.4) descrie descreșterea exponențială în timp a amplitudinii (fig. 13.1). Scăderea amplitudinii în timp a oscilațiilor se numește *amortizare*; amortizarea oscilațiilor se datorește frecării; cu cît frecarea este mai mare, cu atît amortizarea este mai mare și oscilatorul ajunge mai repede în poziția de echilibru. Frecarea este caracteristică sistemelor oscilante reale, astfel încît la toți oscilatorii reali se întîlnesc oscilații amortizate. La oscilatorul electric (circuitul oscilant LC) rolul frecării îl joacă rezistența electrică a circuitului oscilant.

Oscilații forțate. Un oscilator poate fi pus să oscileze sub acțiunea unei excitații exterioare periodice; asemenea oscilații se numesc oscilații forțate. Dacă excitația exterioară are perioada T_e, atunci oscilațiile forțate ale oscilatorului au perioada T_e. Această perioadă poate fi diferită sau egală cu perioada proprie T_0 a oscilatorului.

Oscilații întreținute. În multe domenii ale științei și tehnicii sînt necesare oscilații care să păstreze amplitudinea constantă un timp îndelungat. De exemplu, pentru măsurarea timpului, balansierul ceasului obișnuit sau pendulul pendulei, trebuie să execute oscilații cu amplitudine constantă timp îndelungat. Aceasta se poate realiza în două moduri, fie prin întreținerea oscilațiilor libere ale unui oscilator, fie prin oscilații forțate sub acțiunea unei forțe periodice din exterior. În cazul oscilațiilor forțate este necesar un sistem oscilant exterior care să furnizeze excitația periodică cu o anumită perioadă. Este însă mai ușor să se realizeze întreținerea oscilațiilor libere cu un sistem care furnizează impulsuri periodice. Sistemul de întreținere a oscilațiilor furnizează oscilatorului energia care se pierde prin frecare. În cazul mecanismului

ceasornicului, arcul sau o greutate în cădere furnizează impulsuri periodice pentru întreținerea oscilațiilor printr-un sistem relativ simplu, comandat chiar de oscilator, furca cu roata dințată — balansierul.

Caracteristic pentru oscilațiile întreținute este faptul că perioada lor este chiar perioada proprie T_0 a oscilatorului.

Energia oscilatorului armonic. Energia totală a oscilatorului este compusă din energia cinetică și din energia potențială. Energia cinetică E este dată de relația

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Energia potențială U se datorește forței de revenire F și este dată de relația (9.2)

$$U = -\int_0^y F \cdot \mathrm{d}y \tag{13.5}$$

Folosind pentru forța F expresia (13.2) se obține

$$U = \int_0^y m\omega^2 y \, \mathrm{d}y = m\omega^2 \int_0^y y \, \mathrm{d}y = m\omega^2 \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

Cu ajutorul elongației y dată de relația (13.1) și a vitezei $v = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = A\omega \sin(\omega t + \varphi)$, conform relației (2.15), energia oscilatorului armonic (v. § 2.5) are expresia

$$W = E + U = \frac{1}{2} m (v^2 + \omega^2 y^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m [A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)]$$

$$W = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \tag{13.6}$$

Se observă că energia totală a oscilatorului armonic este proporțională cu pătratul amplitudinii. Energia W se poate scrie și funcție de frecvența $\nu = \omega/2\pi$.

$$W = 2\pi^2 m A^2 \nu^2 \tag{13.7}$$

Dacă nu există frecare, energia totală a unui oscilator se conservă în sensul că suma între energia cinetică E și aceea potențială U rămîne constantă. În acest caz, energiile E și U trec reversibil prin minime și maxime la fel ca y și respectiv v, dar suma lor rămîne constantă. Energia cinetică medie este egală cu energia potențială medie. La început oscilatorul primește energie, datorită unei excitații exterioare, și apoi oscilează pe seama acestei energii. Din cauza frecării energia oscilatorului scade, pentru că o parte din energie se transformă ireversibil în energie calorică; acest fapt conduce la amortizarea oscilațiilor.

13.2. Compunerea oscilațiilor

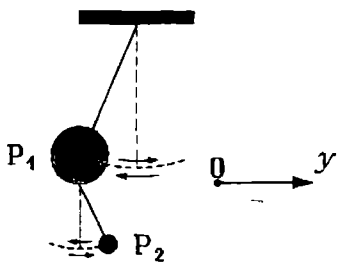


Fig. 13.2. Pendulul P_2 execută o oscilație compusă din oscilația proprie și oscilația pendulului P_1

Un oscilator poate fi supus la două sau mai multe oscilații, datorită acțiunilor diferitelor excitații exterioare. Un astfel de exemplu este un pendul P_1 de care este suspendat pendulul P_2 cu masa mult mai mică (figura 13.2); ele formează împreună un oscilator asupra căruia se exercită două excitații exterioare diferite. Oscilațiile pendulului P_2 se suprapun peste acelea ale pendulului P_1. Oscilațiile rezultante pot fi obținute prin compunerea oscilațiilor pendulului P_1 cu cele ale pendulului P_2. Oscilațiile pendulului P_1 au ecuația

$$y_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

iar ale celuilalt pendul

$$y_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

ambele oscilații având loc pe aceeași direcție, de exemplu Oy.

În exemplul cu cele două pendule, oscilațiile componente au perioade, $T_1 = 2\pi/\omega_1$ și $T_2 = 2\pi/\omega_2$, diferite. Compunerea unor asemenea oscilații, presupuse întreținute, nu formează obiectul acestei cărți. În cele ce urmează se va face apel la compunerea oscilațiilor cu aceeași perioadă.

Așa cum s-a arătat în fizica de liceu *), compunerea oscilațiilor se poate face atît grafic, cît și analitic. Compunerea a două oscilații armonice, cu aceeași perioadă $T = 2\pi/\omega$ și aceeași direcție de oscilație, conduce la oscilația rezultantă a cărei elongație y este

$$y = A \cos(\omega t + \Phi) \tag{13.8}$$

Oscilația rezultantă are amplitudinea A și faza inițială Φ, diferite de acelea ale oscilațiilor componente. Amplitudinea A are expresia binecunoscută

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi \tag{13.9}$$

Ea este dependentă de amplitudinile A_1 și A_2 ale oscilațiilor componente și de defazajul $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ între cele două oscilații, astfel încît

$$A = A_1 + A_2 \qquad \text{pentru} \qquad \varphi = 0 \quad (\varphi_2 = \varphi_1)$$

$$A = A_1 - A_2 \qquad \text{pentru} \qquad \varphi = \pi \quad (\varphi_2 = \varphi_1 + \pi)$$

Dacă $A_1 = A_2$, în cazul $\varphi = \pi$; amplitudinea rezultantă este nulă, $A = 0$.

În ceea ce privește faza inițială Φ a oscilației rezultante același raționament conduce la expresia

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \tag{13.10}$$

*) În manualul de liceu, raționamentul pe baza căruia s-au dedus relațiile date aici este făcut la studiul undelor, adică se examinează compunerea oscilațiilor produse de două unde. Desigur că raționamentul este adevărat și pentru oscilații locale, care nu se propagă.

Dacă se ia originea fazelor egală chiar cu φ_1, adică $\varphi_1 = 0$ și dacă φ_2 ia valorile 0, $\pi/2$ și π, pentru Φ rezultă expresiile

$$\varphi_2 = 0 \qquad \operatorname{tg}\Phi = 0 \qquad \Phi = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{tg}\Phi = \frac{A_2}{A_1} \qquad \Phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{A_2}{A_1}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{4}, \text{ dacă } A_1 = A_2$$

$$\varphi_2 = \pi \qquad \operatorname{tg}\Phi = 0 \qquad \Phi = 0, \text{ dacă } A_1 > A_2$$

$$\Phi = \pi, \text{ dacă } A_1 < A_2$$

Expresiile obținute pentru amplitudinea și faza inițială a oscilației rezultante, (13.9) și (13.10), sînt asemănătoare cu acelea obținute în algebra vectorială la adunarea a doi vectori. Ca urmare a acestei analogii, se recurge la reprezentarea Fresnel în studiul oscilațiilor. În reprezentarea Fresnel, oscilația este redată prin proiecția pe axa Oy a unui vector rotitor al cărui modul este egal cu amplitudinea oscilației. În reprezentarea Fresnel vectorii sînt

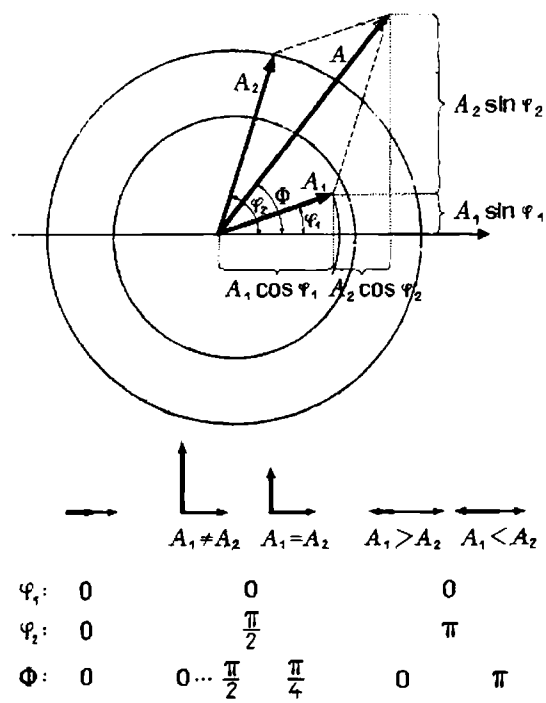


Fig. 13.3 Obținerea amplitudinii rezultante A și a fazei inițiale Φ, cu ajutorul reprezentării Fresnel, în funcție de parametrii oscilațiilor componente: A_1, A_2, φ_1 și φ_2. În partea inferioară sînt redate valorile lui Φ corespunzătoare valorilor lui φ_1 și φ_2 pentru diferite situații ale amplitudinilor A_1 și A_2

redați astfel încît să facă cu direcția Oy un unghi egal cu faza inițială. În figura 13.3 este dată reprezentarea Fresnel pentru cele două oscilații a căror compunere a fost calculată mai înainte. Tratînd amplitudinile A_1 și A_2 ca vectori și folosind regulile algebrei vectoriale se obțin imediat expresiile (13.9) și (13.10).

Reprezentarea Fresnel este foarte importantă în studiul curentului alternativ unde *nu interesează valorile momentane* ale oscilațiilor: curentul electric și tensiunea electrică, ci numai amplitudinile și defazările lor. În unele cărți vectorul rotitor este denumit *fazor*.

Bătăile constituie un caz interesant de compunere a oscilațiilor și anume este vorba de compunerea a două oscilații cu frecvențele ν_1 și respectiv ν_2 foarte apropiate ca valoare

$$y_1 = A\cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A\cos(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)$$

Pentru ușurarea calculului se presupune că amplitudinile celor două oscilații sînt egale, această ipoteză nereducînd cu nimic generalitatea concluziilor. Oscilația rezultantă cunoscută sub numele de „bătăi" are elongația y de forma

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_1) + \cos(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)]$$

$$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (13.11)$$

deoarece

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Expresia (13.11) se poate scrie sub forma generală care exprimă elongația unei oscilații, dată de relația (13.1), adică sub forma produsului între amplitudine și cosinusul fazei. În acest caz amplitudinea oscilației rezultante este

$$2A\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

iar în faza oscilației rezultante apare frecvența $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$. Întrucît amplitudinea oscilației rezultante conține timpul t rezultă că această mărime variază în timp. În ceea ce privește frecvența $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ se observă că aceasta este egală cu media frecvențelor ν_1 și ν_2 ale oscilațiilor componente. Acest rezultat se obține și prin compunerea grafică, cum se arată în figura 13.4, care este reprezentarea grafică a fenomenului bătăilor.

Amplitudinea oscilației rezultante variază în timp cu frecvența $\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$ și se anulează la anumite valori ale timpului. Anularea amplitudinii rezultante are loc dacă cele două oscilații componente au amplitudinile egale; în cazul în care amplitudinile componente nu sînt egale amplitudinea rezultantă ia valori minime la timpurile respective.

Prin urmare în fenomenul bătăilor, amplitudinea oscilației rezultante trece prin maxime și minime; un maxim și un minim se succed cu frecvența $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$. În acustică se spune că bătăile se succed în timp cu frecvența $\Delta\nu$. Acest fenomen este independent de fazele celor două oscilații componente;

frecvenţa $\Delta\nu$ a bătăilor nu depinde de diferenţa de fază $\varphi_1 - \varphi_2$. De exemplu, două oscilaţii cu frecvenţele 440 Hz şi 445 Hz, produc, independent de diferenţa de fază între ele, bătăi cu $\Delta\nu = 5$ Hz, adică, cum se spune, cinci bătăi pe secundă. Oscilaţii de frecvenţele 440 Hz şi respectiv 445 Hz produc sunete; prin compunerea lor apar *bătăile* pe care urechea le percepe ca *bătăi*, adică ca un sunet cu amplitudinea variabilă în timp. Dacă diferenţa între frecvenţele ν_1 şi ν_2 este mai mare, bătăilor le corespunde un $\Delta\nu$ mai mare; urechea

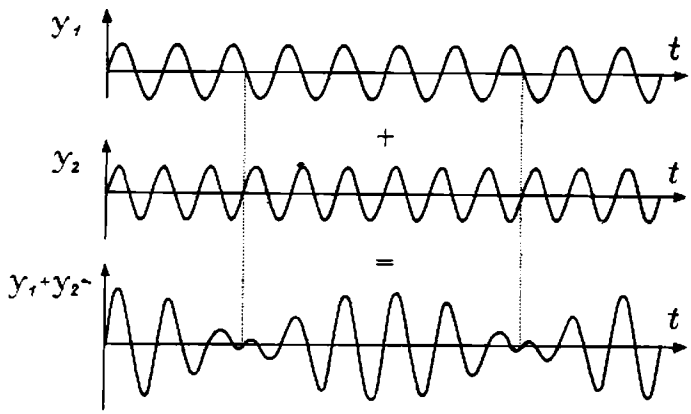


Fig. 13.4. Prin compunerea a două oscilaţii cu frecvenţele apropiate se obţin „bătăi".

nu percepe însă bătăi cu $\Delta\nu > 10$ Hz. Dacă diferenţa între frecvenţele ν_1 şi ν_2 este mică apar mai puţine bătăi pe secundă, iar pentru $\nu_1 = \nu_2$, se obţine $\Delta\nu = 0$. În acest caz compunerea celor două oscilaţii se reduce la cazul studiat la începutul acestui paragraf: compunerea a două oscilaţii a căror frecvenţă este aceeaşi. Fenomenul bătăilor este important pentru acustică. În afara acestei importanţe practice, fenomenul bătăilor are şi o importanţă teoretică, aşa cum se va vedea atît în paragraful următor cît şi mai tîrziu, la stabilirea vitezei de grup a radiaţiilor electromagnetice şi a undelor asociate.

13.3. **Analiza Fourier**

Exprimarea unei oscilaţii în funcţie de timp, aşa cum este descrisă matematic de relaţia (13.1), indică faptul că oscilaţia este un proces periodic armonic, care are o amplitudine constantă în timp şi care ar dura în timp de la $-\infty$ la $+\infty$. În natură nu se întîlnesc procese oscilatorii perfect periodice, adică procese care să se întindă în timp de la $-\infty$ la $+\infty$, ci se întîlnesc numai *procese oscilatorii limitate în timp*. Chiar o oscilaţie întreţinută nu poate dura infinit, ci ea există numai timpul în care sistemul oscilant primeşte energie. Procesele oscilatorii limitate în timp prezintă o importanţă foarte mare atît pentru fizică cît şi pentru tehnică. Pentru cele ce urmează se consideră ca procese periodice, cele care se întind în timp de la $-\infty$ la $+\infty$; acestea pot fi armonice sau nearmonice. *Procesele oscilatorii limitate în timp sînt procese neperiodice.* Analiza proceselor oscilatorii *periodice nearmonice* şi a celor *neperiodice* a fost făcută de Fourier. Fourier a stabilit că orice proces oscilatoriu periodic nearmonic şi orice proces neperiodic constă din suprapunerea unui număr de oscilaţii armonice.

Procesul periodic nearmonic. Conform teoremei lui Fourier un *proces periodic nearmonic*, de pulsație ω, poate fi reprezentat prin suprapunerea oscilațiilor armonice care au pulsațiile ω, 2ω, 3ω, ... și amplitudinile variabile. Nu vom intra în detaliile teoremei lui Fourier ci vom ilustra afirmația făcută prin două exemple.

Astfel o oscilație „pătrată", poate fi obținută dintr-un număr finit de oscilații armonice sinusoidale

$$y = A \sin \omega t + \frac{A}{3} \sin 3\omega t + \frac{A}{5} \sin 5\ \omega t + \ldots \qquad (13.12)$$

unde pulsația ω are expresia $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. Compunerea oscilațiilor armonice sinusoidale este arătată în figura 13.5, într-o primă aproximație și anume

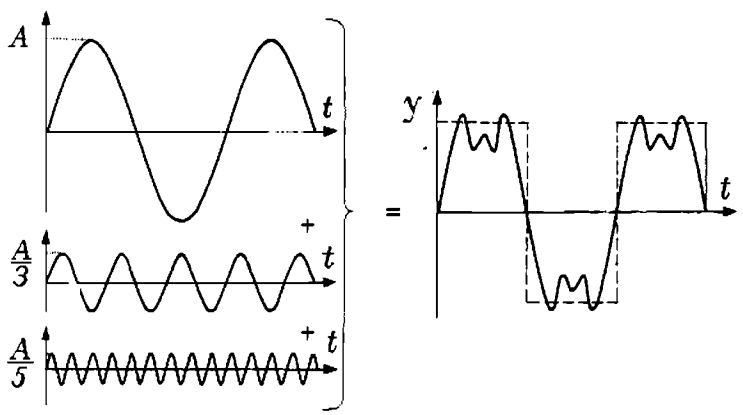


Fig. 13.5. Formarea oscilației „pătrate" prin suprapunerea oscilațiilor sinusoidale cu frecvențele și amplitudinile date în relația (13.12). Oscilațiile componente și oscilația rezultantă durează de la $-\infty$ la $+\infty$.

folosind numai primii trei termeni ai seriei. Cu cît se folosesc mai mulți termeni în seria (13.12) cu atît oscilația rezultantă este mai aproape de forma pătrată desenată punctat în figura 13.5.

O oscilație în dinți de ferăstrău, de pulsație ω poate fi reprezentată prin seria

$$y = 2A \sin \omega t - A \sin 2\omega t + \frac{2A}{3} \sin 3\omega t - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{2A}{n} \sin n\omega t \qquad (13.13)$$

Compunerea acestor oscilații este arătată în figura 13.6. Ca și în cazul precedent, se remarcă faptul că pentru mai mulți termeni ai seriei (13.13) oscilația rezultantă se apropie mai mult de forma dintelui de ferăstrău desenat punctat în figură.

Oscilațiile rezultante redate în figurile 13.5 și 13.6 sînt procese periodice însă nu armonice. Subliniem faptul că proces periodic înseamnă întinderea în timp de la $-\infty$ la $+\infty$.

În concluzie, conform teoremei lui Fourier orice proces oscilatoriu periodic nearmonic poate fi descompus într-o *serie Fourier* de „componente armonice"

$$y = \sum_i A_i \sin \omega_i t \qquad (13.14)$$

Ansamblul frecvențelor componentelor armonice formează un *spectru de frecvențe*. Spectrul obținut este un spectru *discret*, adică compus din anumite frecvențe care formează o progresie aritmetică ν, 2ν, 3ν, ... Deseori se utilizează terminologia din acustică, adică se denumește ν frecvența fundamentală, iar 2ν, 3ν, ... armonicele ei. Coeficienții A_i ai termenilor din seria Fourier,

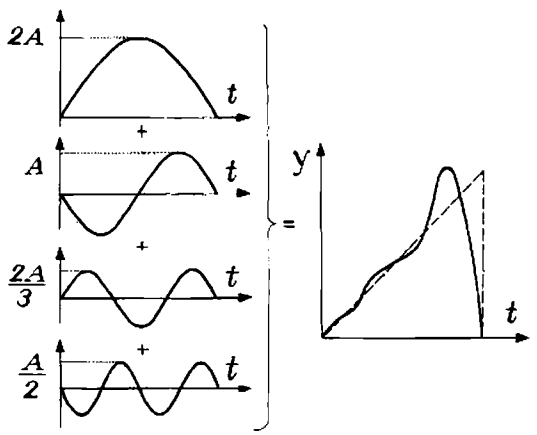


Fig. 13.6. Formarea oscilației în dinți de ferăstrău prin suprapunerea oscilațiilor sinusoidale, cu frecvențele și amplitudinile date în relația (13.13). Oscilațiile componente și oscilația rezultantă durează de la $-\infty$ la $+\infty$.

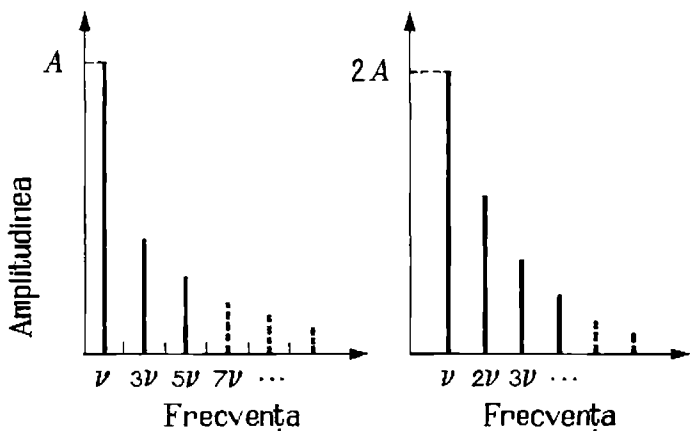


Fig. 13.7. Spectrul de frecvențe al oscilațiilor periodice nearmonice din figurile 13.5 și 13.6. Cu linii punctate s-au arătat armonicele superioare de care nu s-a ținut seama în figurile anterioare.

se numesc coeficienți Fourier și reprezintă amplitudinile armonicelor corespunzătoare. Cu ajutorul acestor coeficienți se reprezintă spectrul frecvențelor unui proces oscilatoriu periodic nearmonic în diagrama amplitudine-frecvență. Spectrele de frecvență în diagrama amplitudine-frecvență pentru procesele periodice nearmonice redate în figurile 13.5 și 13.6 sînt desenate în figura 13.7. Aceste spectre discrete reprezentate prin linii verticale, corespunzătoare frecvențelor respective se numesc *spectre de linii*.

Procesul neperiodic. Procesul neperiodic este procesul oscilatoriu limitat în timp; procesele oscilatorii întîlnite în natură sînt de acest tip. Un asemenea proces se numește de obicei *semnal*; un semnal este de exemplu o oscilație amortizată (fig. 13.8, a) sau o oscilație a cărei amplitudine variază în timp asemănător cu variația amplitudinii oscilației din fenomenul bătăilor (fig. 13.8,b).

Conform teoremei lui Fourier și procesele neperiodice pot fi obținute prin suprapunerea unor oscilații armonice. Se pot extinde considerațiile făcute mai înainte pentru procesele periodice și la procesele neperiodice. Pentru aceasta este nevoie să se facă observația că într-un proces neperiodic elongația nu-și mai reia niciodată în timp, de la $-\infty$ la $+\infty$, vreuna din valorile

anterioare. Faptul că elongația nu mai trece prin nici una din valorile anterioare pentru un timp infinit lung permite să se considere procesul neperiodic ca un proces periodic cu perioada infinită ($T \to \infty$). În consecință se pot aplica și aici considerațiile făcute la procesul periodic, punînd $T \to \infty$.

Într-un proces neperiodic, deoarece $T \to \infty$, diferența dintre două frecvențe succesive ale oscilațiilor componente, $n\nu$ și $(n-1)\nu$, se poate scrie

$$n\nu - (n-1)\nu = \nu = \frac{1}{T}; \quad n\nu - (n-1)\nu \to 0$$

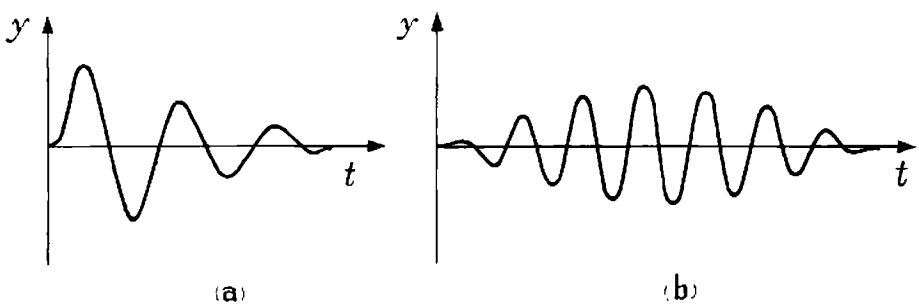


Fig. 13.8. Exemple de procese oscilatorii neperiodice.

Aceasta înseamnă că frecvența celor două oscilații apropiate diferă infinitesimal una de alta. Prin urmare procesul neperiodic se obține prin compunerea unor oscilații armonice ale căror frecvențe diferă infinitesimal una de alta. Cu alte cuvinte, frecvența oscilațiilor armonice componente are o variație continuă. În consecință, pentru procesul neperiodic, seria Fourier dată de relația (13.14) trebuie înlocuită de integrala Fourier

$$y = \int_0^\infty A(\omega)\sin \omega t \, d\omega \qquad (13.15)$$

care se extinde pe tot domeniul pulsațiilor și deci al frecvențelor. S-a notat $A(\omega)$ deoarece amplitudinea depinde de pulsația ω și este caracteristică oscilației componente.

În figura 13.9 se dă un exemplu care arată compunerea unor oscilații armonice, compunere care conduce la formarea unui semnal. Fie pentru început un număr de trei oscilații sinusoidale cu originea timpului comună în 0 și care au pulsațiile ω, ω_1 și ω_2, din ce în ce mici. Prin compunerea lor se formează oscilația rezultantă care are amplitudinea maximă în vecinătatea punctului 0 și amplitudini din ce în ce mici pe măsură ce timpul față de 0 crește. Cu cît se consideră un număr mai mare de oscilații componente cu pulsația variind continuu, cu atît timpul în care $A \neq 0$ este mai mic. La valori mari ale timpului, adică suficient de departe de originea 0 a timpului, oscilația rezultantă se anulează, așa cum se vede în josul figurii 13.9. Prin urmare prin compunerea unui număr mare de oscilații cu pulsația variind continuu se obține o oscilație neperiodică, adică limitată în timp — un semnal.

În concluzie, procesul neperiodic se descompune într-o integrală Fourier, deoarece pulsațiile și deci frecvențele oscilațiilor componente variază continuu. Dacă se reprezintă grafic amplitudinile armonicelor funcție de frecvență, se obține un *spectru continuu de frecvențe* (fig. 13.10) spre deosebire de spectrul de frecvențe al unui proces periodic care este un spectru discret. Spectrul continuu este caracterizat printr-o frecvență principală, numită de obicei frecvența de vîrf și printr-un domeniu $\Delta\nu$ al frecvențelor.

Un semnal are o anumită durată în timp, notată cu Θ, așa cum se arată în figurile 13.9 și 13.10. Există o legătură între durata Θ a unui semnal și domeniul $\Delta\nu$ al frecvențelor oscilațiilor care compun semnalul respectiv. Demonstrația relației matematice între Θ și $\Delta\nu$ depășește scopul acestei

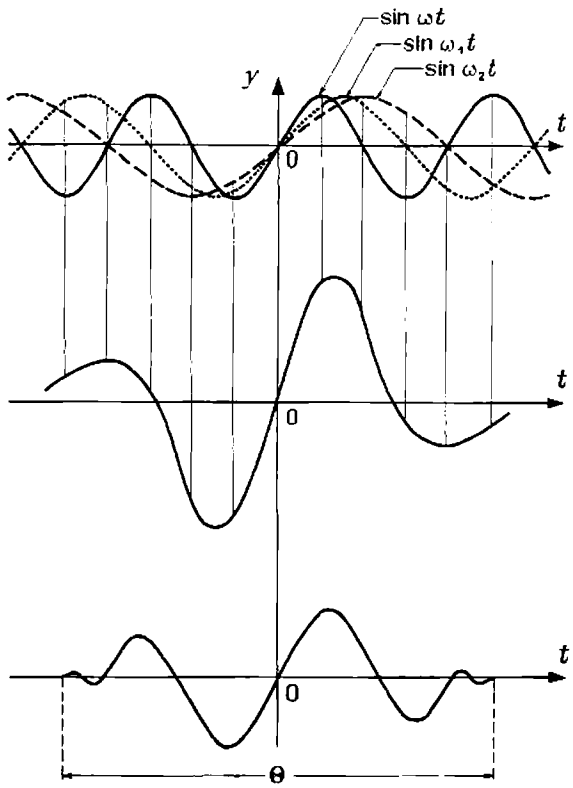


Fig. 13.9. Prin suprapunerea a trei oscilații cu pulsațiile apropiate ω, ω_1 și ω_2 se obține oscilația din mijlocul figurii. Suprapunerea unui număr infinit de oscilații armonice, cu originea comună în 0, formează semnalul din josul figurii.

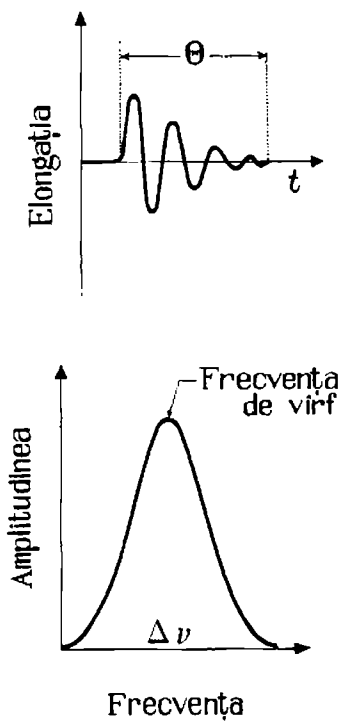


Fig. 13.10. Procesul oscilatoriu neperiodic cu durata Θ se descompune într-un spectru continuu de frecvențe caracterizat prin domeniul de frecvențe $\Delta\nu$.

cărți, dar se poate da o justificare, bazată pe analiza fenomenului bătăilor. În cazul compunerii a două oscilații de frecvențe ν_1 și ν_2 foarte apropiate ca valoare se obțin bătăi care se succed cu frecvența $\nu_1 - \nu_2$. Durata Θ între două noduri ale amplitudinii rezultante ($y = 0$) se obține dînd argumen-

tului cosinusului din expresia amplitudinii rezultante, dată în expresia (13.11), valorile următoare

$$2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t = \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} (t + \Theta) = \frac{3\pi}{2}$$

Prin rezolvarea acestor ecuații se obține

$$\Theta = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \tag{13.16}$$

Revenind la figura 13.9 se observă că prin compunerea oscilațiilor cu frecvențe care variază continuu și ale căror valori sînt din ce în ce mai mici față de frecvența $\nu = \omega/2\pi$, amplitudinea oscilației rezultante își păstrează maximele în vecinătatea punctului 0. Se observă de asemenea că oscilațiile cu frecvențele mici produc anularea amplitudinii oscilației rezultante la timpuri din ce în ce mai mari față de originea 0. Pentru ca amplitudinea oscilației rezultante să rămînă egală cu zero pînă la un timp infinit de mare este necesar ca frecvențele oscilațiilor componente să ia valori din ce în ce mai mici care să tindă către zero. Cu alte cuvinte prin compunerea oscilațiilor a căror frecvență variază de la ν pînă la zero, deci cu domeniul de frecvențe $\Delta\nu$, se obține o amplitudine rezultantă diferită de zero în intervalul de timp Θ și o amplitudine egală cu zero în afara limitelor intervalului de timp Θ. Aceasta înseamnă că prin compunerea oscilațiilor cu frecvențele variind continuu în domeniul $\Delta\nu$, se obține un semnal cu durata Θ.

Extinzînd relația (13.16) din cazul bătăilor unde interveneau două frecvențe componente, la cazul semnalului unde intervin mai multe frecvențe componente, a căror variație este continuă în domeniul $\Delta\nu$, se poate scrie durata Θ a unui semnal sub forma

$$\Theta = \frac{1}{\Delta\nu}$$

sau

$$\Theta \cdot \Delta\nu = 1 \tag{13.17}$$

Conform relației (13.17) un semnal cu durată mică (Θ mic) se obține prin suprapunerea unui număr mare de frecvențe adică prin suprapunerea unui domeniu larg de frecvențe, ceea ce corespunde unui spectru continuu larg; un semnal cu durată mare (Θ mare) corespunde unui spectru continuu îngust. Atunci cînd spectrul conține o singură frecvență, $\Delta\nu = 0$, semnalul este infinit în timp ($\Theta \to \infty$) ceea ce corespunde unei oscilații armonice, care se știe că se întinde în timp de la $-\infty$ la $+\infty$. Consecințele relației (13.17) sînt ilustrate în figura 13.11.

13.4. Propagarea oscilațiilor

Pe baza cunoștințelor din fizica de liceu (v. § 2.5) s-a arătat că oscilațiile nu rămîn localizate într-un mediu ci se propagă de la o particulă la alta a mediului. În acest fel se formează o *undă* a cărei ecuație este

$$y = A \cos (\omega t - \beta x) \tag{13.18}$$

unde y este elongația într-un anumit punct, x măsurînd spațiile în direcția de propagare, iar β este coeficientul de fază. Mărimea βx reprezintă diferența de fază dintre originea spațiilor și punctul de abscisă x și se datorește timpului τ necesar ca *faza undei*, $\omega t - \beta x$, să parcurgă distanța x cu viteza de propagare a fazei undei, v, deci $\tau = x/v$ și deci

$$\beta x = \omega\tau = \omega\frac{x}{v}\ ; \qquad \beta = \frac{\omega}{v} \tag{13.19}$$

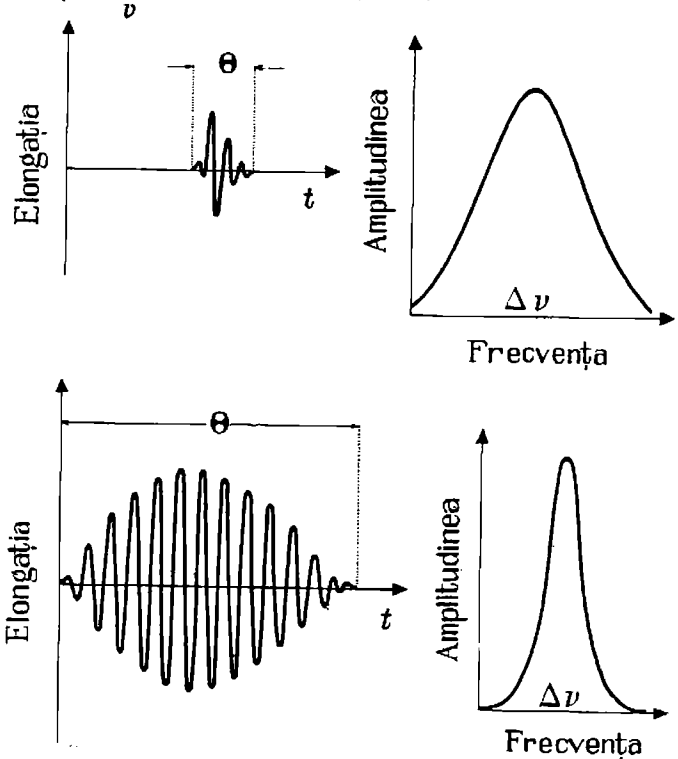


Fig. 13.11. Unui semnal cu durată mică îi corespunde un spectru de frecvențe continuu larg ($\Delta\nu$ mare) pe cînd unui semnal cu durată mare îi corespunde un spectru continuu îngust ($\Delta\nu$ mic).

Expresiile fazei. Expresia coeficientului β permite scrierea fazei unei unde sub forma

$$\omega t - \frac{\omega}{v}x = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Folosind relația între pulsație și frecvență, $\omega = 2\pi\nu$, se obțin alte expresii ale fazei unei unde

$$2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv}\right)$$

unde $T = 1/\nu$ este perioada oscilației care se propagă. Dacă se folosește lungimea de undă λ, în mediul respectiv, $\lambda = Tv = v/\nu$, faza undei se poate scrie

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

Cînd se consideră însă o direcție de propagare oarecare în spațiu, se introduce *vectorul de undă*, sau *vectorul de propagare a undei* $\vec{k}$ al cărui modul este egal cu inversul lungimii de undă

$$|\vec{k}| \equiv \frac{1}{\lambda}$$

Cu ajutorul vectorului de undă și cu ajutorul razei vectoare $\vec{r}$ a unui punct din spațiu, faza unei unde în punctul respectiv are expresia

$$2\pi(\nu t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

În fine în optică se introduce și indicele de refracție n al unui mediu $n = c/v$ și deci $x/\lambda = x\nu/v = x\nu n/c$, ceea ce conduce la alte expresii ale fazei unei unde

$$2\pi(\nu t - \frac{n}{c}\nu x) = 2\pi\nu(t - \frac{n}{c}x) = \omega(t - \frac{n}{c}x)$$

Ultimele expresii ale fazei unei unde sînt folosite, mai ales, în mecanica ondulatorie.

Ecuația de propagare. Ecuația undei dată de relația (13.18) exprimă variația elongației undei atît în timp cît și în spațiu. Întrucît interesează legătura între cele două variații ale elongației y, se efectuează derivatele de ordinul întîi și doi ale elongației în raport cu timpul t și cu spațiul x

$$\frac{dy}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \beta x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \beta x) = -\omega^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta A \sin(\omega t - \beta x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\beta^2 A \cos(\omega t - \beta x) = -\beta^2 y$$

Eliminînd elongația y între derivatele de ordinul doi se obține

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\omega^2}{\beta^2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

sau, conform relației (13.19), ecuația cu derivate parțiale,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{dx^2} \tag{13.20}$$

ceea ce înseamnă că în cazul unei unde derivata a doua în raport cu timpul a elongației este proporțională cu derivata a doua în raport cu spațiul a elongației, constanta de proporționalitate fiind viteza de propagare a fazei undei.

Relația (13.20) ocupă un loc central în fizică; despre orice mărime care satisface o ecuație de această formă se poate trage concluzia că se propagă sub forma unei unde. Mărimea y care satisface ecuația (13.20) poate fi de natură foarte diferită; în capitolul 15 se va vedea că în cazul cîmpului electromagnetic atît cîmpul electric cît și cîmpul magnetic satisfac ecuația (13.20).

Energia undei. În cursul procesului de propagare, o undă mecanică pune în mișcare particulele mediului respectiv; aceste particule intră una cîte una în oscilație, adică devin oscilatori. Cu alte cuvinte, unda transmite energia de la un oscilator la altul al mediului. Se poate calcula energia w pe unitatea de volum, numită densitatea de volum a energiei, într-un mediu în care are loc un proces ondulatoriu, în funcție de numărul oscilatorilor din unitatea de volum și de energia W a unui oscilator; energia W este dată de relația (13.7). Numărul oscilatorilor din unitatea de volum este egal cu numărul particulelor din unitatea de volum, n, și deci

$$w = nW = n2\pi^2 mA^2\nu^2$$

Introducînd densitatea ρ ca masa unității de volum, $\rho = nm$, m fiind masa unui oscilator, rezultă

$$w = 2\pi^2\rho A^2\nu^2 = \frac{1}{2}\omega^2\rho A^2 \qquad (13.21)$$

Prin urmare, pentru o undă care se propagă într-un mediu de densitate ρ, densitatea de volum a energiei are expresia (13.21), adică depinde de densitatea mediului, de pătratul amplitudinii A și de pătratul frecvenței ν.

Intensitatea I a unei unde este mărimea care caracterizează unda din punct de vedere energetic. Intensitatea se definește ca energia transportată de undă în unitatea de timp, printr-o suprafață de arie unitară situată perpendicular pe direcția de propagare a undei. Această energie este tocmai energia conținută în volumul paralelipipedului drept care are baza unitară și înălțimea egală cu viteza de propagare a energiei, u, în mediul respectiv (figura 13.12); ca urmare

$$I = w \cdot u \qquad (13.22)$$

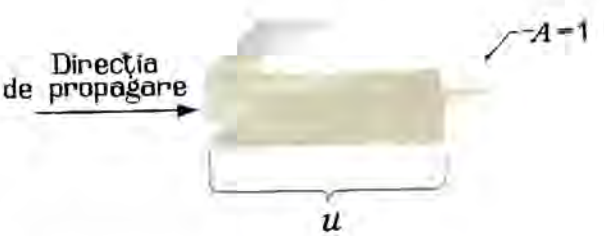


Fig. 13.12. Pentru calculul intensității unei unde.

și cu ajutorul relației (13.21)

$$I = \frac{1}{2}\omega^2\rho A^2 u \qquad (13.23)$$

Din această relație se observă că intensitatea unei unde depinde de mărimile caracteristice undei ω și A și de mărimi caracteristice mediului, den-

sitatea ρ și viteza de propagare a energiei în mediul respectiv. Intensitatea undei se măsoară în jouli pe secundă și metru pătrat, sau în waţi pe metru pătrat.

În concluzia acestui paragraf trebuie subliniat faptul că unda reprezintă un transport de energie și nu un transport de substanță. În ceea ce privește propagarea unei unde, în relația (13.20) intervine *viteza de propagare a fazei undei*, iar în relația (13.22) intervine *viteza de propagare a energiei* transportată de undă. În alte capitole se va vedea că în multe cazuri cele două viteze sînt egale, dar se întîlnesc medii, de exemplu mediile dispersive, în care cele două viteze sînt diferite.

13.5. Coerența

Așa cum se știe din fizica de liceu, la suprapunerea undelor de aceeași frecvență apare fenomenul de *interferență*. Atunci cînd are loc interferența, o particulă a mediului este supusă oscilațiilor diferite de la două unde care ajung în acel punct. Prin urmare pentru studiul interferenței este necesar să se analizeze care sînt cazurile care pot apare la *compunerea oscilațiilor*.

Prin compunerea a două oscilații armonice y_1 și y_2 care au aceeași perioadă și aceeași direcție, se obține ca rezultantă o oscilație armonică care are perioada aceeași cu a oscilațiilor componente; elongația rezultanta y este dată de relația (13.8)

$$y = y_1 + y_2 = A \cos (\omega t + \Phi)$$

iar amplitudinea A are expresia

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Această expresie arată că, în general, pătratul amplitudinii oscilației rezultante nu este egal cu suma pătratelor amplitudinilor oscilațiilor componente.

Energia oscilatorului din punctul considerat și deci energia undei care se propagă plecînd din acel punct este proporțională cu pătratul amplitudinii oscilației rezultante a oscilatorului. *Intensitatea* undelor incidente și a celei emergente este proporțională cu pătratul amplitudinii undelor incidente și respectiv a undei emergente. În consecință, conform relației de mai sus, intensitatea rezultantă nu este egală, în general, cu suma intensităților undelor componente. Amplitudinea undei rezultante și deci intensitatea acesteia depinde de diferența fazelor $(\varphi_2 - \varphi_1)$ corespunzătoare oscilațiilor produse în punctul considerat de undele componente. Ca urmare amplitudinea undei rezultante poate avea oricare din valorile cuprinse între limitele (se lucrează cu pătratele amplitudinilor, deoarece intensitatea unei unde este proporțională cu pătratul amplitudinii respective)

(a) $A^2 = (A_1 - A_2)^2$ pentru $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

(b) $A^2 = (A_1 + A_2)^2$ pentru $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$

Între aceste limite se situează și valoarea

(c) $A^2 = A_1^2 + A_2^2$ pentru $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$

pentru care intensitatea undei rezultante este egală cu suma intensităților undelor componente. Aceasta este unica valoare a diferenței fazelor $\varphi_2 - \varphi_1$ pentru care intensitatea undei rezultante este egală cu suma intensităților undelor componente.

În afara cazurilor (a), (b) și (c), în natură se întîlnesc mult mai multe valori ale diferenței fazelor $\varphi_2 - \varphi_1$ și anume această diferență a fazelor poate lua, cu aceeași probabilitate, orice valoare cuprinsă între zero și π. În această situație cazul (*c*) în care intensitatea undei rezultante este egală cu suma intensităților undelor componente este un caz particular, care nu este mai probabil decît celelalte cazuri. Mai mult, în realitate, oscilațiile nu sînt perfect armonice, adică în natură nu se întîlnesc oscilații care păstrează un timp infinit amplitudinea constantă. În consecință, undele produse prin propagarea acestor oscilații *nu sînt unde perfect armonice.*

Datorită naturii surselor de oscilații, oscilațiile sînt fie amortizate, fie se întrerup din timp în timp pentru a apare din nou, dar cu alte defazări; cu alte cuvinte, sursele de oscilații emit de obicei, semnale, în sensul arătat în § 13.3. Orice sursă de oscilații are un mare număr de oscilatori — atomii care emit oscilațiile — astfel încît oscilațiile emise de aceștia se succed în timp cu diferite defazări. La compunerea unor astfel de oscilații, ale căror defazări se modifică în timp, energia oscilației rezultante se va modifica în timp. Modificările în timp sînt mai mult sau mai puțin rapide, dar atît de rapide încît ele nu pot fi detectate de aparatura pentru observație de care se dispune sau de către urechea sau ochiul omenesc. În acest caz, ceea ce se înregistrează este o mărime medie și anume *energia medie* sau *intensitatea medie* în timp.

Se poate calcula energia medie sau intensitatea medie a oscilației rezultante în intervalul de timp τ

$$\overline{A^2} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi)\,d\tau$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\varphi\,d\tau \qquad (13.24)$$

unde s-a notat, pentru prescurtare, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. În cazul situației care se întîlnește în realitate, cînd întreruperea și producerea oscilațiilor are loc la întîmplare, diferența de fază are un caracter statistic, adică poate lua oricare din valorile cuprinse între 0 și 2π; de aceea pentru timpul de observație τ se obține

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\varphi\,d\tau = 0$$

și deci

$$\overline{A^2} = A_1^2 + A_2^2 \qquad (13.25)$$

Ca urmare, la compunerea a două unde de aceeași perioadă se disting două cazuri:

1. Diferența fazelor oscilațiilor produse în punctul considerat de către undele componente se menține constantă în timpul τ de observație. Intensitatea undei rezultante se deosebește de suma intensităților undelor compo-

nente, fiind mai mică sau mai mare decît aceasta în funcție de diferența fazelor. Se spune despre cele două unde componente că sînt *unde coerente.*

2. Diferența fazelor oscilațiilor produse în punctul considerat de către undele componente variază în mod întîmplător în timpul observației. Intensitatea undei rezultante este egală cu suma intensităților undelor componente. În acest caz se spune despre undele componente că sînt *unde necoerente.*

Se subliniază faptul că undele riguros armonice, adică cu durata infinit de mare și cu amplitudinea constantă în timp sînt totdeauna coerente, deoarece diferența de fază între două oscilații produse în punctul în care aceste unde se compun rămîne constantă într-un timp oricît de lung. Dacă durata a două unde armonice este finită caracterul de coerență se păstrează pe durata respectivă, căci în acest timp diferența de fază între oscilațiile produse de cele două unde asupra unui oscilator, rămîne constantă. În cazul a două unde armonice întreținute, diferența de fază rămîne constantă în timpul producerii lor și deci se poate vorbi de păstrarea caracterului de coerență în acest timp. Aceste considerații servesc în studiul interferenței.

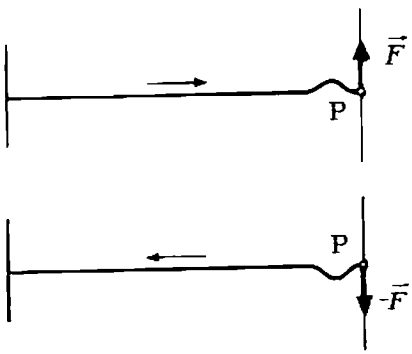


Fig. 13.13. La reflectarea unei unde pe o coardă fixată rigid, acțiunea punctului de sprijin se manifestă prin defazarea cu π a undei emergente față de unda incidentă.

În încheierea acestui paragraf se va analiza fenomenul undelor staționare, care este un caz special de suprapunere a undelor. Din fizica de liceu, se știe că o undă care se propagă în lungul unei coarde fixate la ambele capete, se reflectă la aceste capete. Cînd are loc reflexia undei incidente în punctul P (fig. 13.13) unda incidentă exercită asupra punctului de sprijin o forță; unda fiind transversală, elongația este perpendiculară pe direcția de propagare și deci forța este perpendiculară pe direcția de propagare. Conform teoremei acțiunii și reacțiunii, punctul de sprijin P exercită o forță egală și de semn schimbat asupra coardei, ceea ce face ca unda care se reflectă să fie defazată cu π, față de unda incidentă. Cu alte cuvinte apare prin reflexie o modificare a sensului elongației.

Din suprapunerea celor două unde, incidentă și reflectată, care se propagă în sensuri contrarii și sînt defazate cu π, rezultă o undă — unda rezultantă —, a cărei elongație este

$$y = y_1 + y_2 = A \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) - A \cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Întrucît

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin\frac{\beta+\alpha}{2} \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

elongația undei rezultante are expresia

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi\nu t \qquad (13.26)$$

Se observă din această relație că amplitudinea undei rezultante egală cu $2A \sin(2\pi x/\lambda)$ nu variază în timp, fiind constantă pentru un anumit punct al coardei. Pentru acest motiv unda rezultantă exprimată de relația (13.26) se numește *undă staționară.* Punctele în care amplitudinea este nulă, adică acelea pentru care $\sin(2\pi x/\lambda) = 0$, se numesc *noduri*, iar cele pentru care amplitudinea este maximă, $\sin(2\pi x/\lambda) = 1$, se numesc *ventre.*

Este interesant să se analizeze lungimile de undă posibile în cazul undei staționare care se produce pe o coardă de lungime L. La capetele coardei unde aceasta este fixată, deci pentru $x = 0$ și $x = L$, unda staționară prezintă noduri, $y = 0$ (elongația este nulă), la orice timp. Scriind că amplitudinea este zero la $x = L$ se obține

$$\sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi \frac{L}{\lambda} &= n\pi \\ \lambda &= \frac{2L}{n} \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (13.27)$$

Prin urmare o coardă fixată la ambele capete, vibrează numai cu anumite lungimi de undă și anume λ ia valorile $2L$, L, $2L/3$, $L/2$, ... cum se vede în figura 13.14.

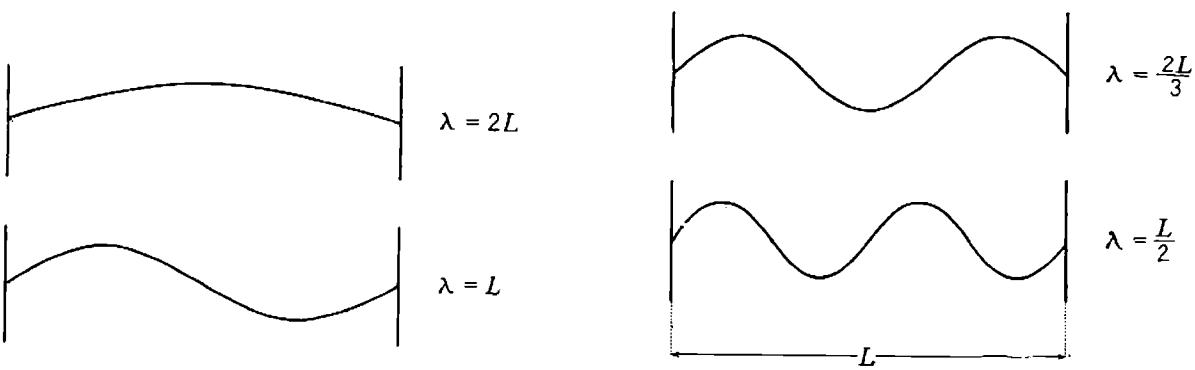


Fig. 13.14. Lungimile de undă cu care poate vibra o coardă cu lungimea L prin unde staționare.

Pentru $n = 1$ lungimea coardei reprezintă jumătate din lungimea de undă, pentru $n = 2$ lungimea coardei este egală cu λ și așa mai departe. Fiecare din lungimile de undă posibile pe o coardă fixată la capete, corespunde unei frecvențe $\nu = v/\lambda$, unde v este viteza de propagare a undei în materialul coardei. Frecvența corespunzătoare pentru $n = 1$ se numește frecvența *fundamentală*, iar frecvențele 2ν, 3ν, ... corespunzătoare celorlalte valori ale lui n se numesc *armonice*. Oscilațiile coardei produc oscilații ale particulelor de aer învecinate coardei și deci apar unde în aerul înconjurător. Trebuie precizat că lungimea de undă în aer nu este egală cu aceea corespunzătoare coardei, deoarece vitezele de propagare ale undei în materialul corzii și în aer diferă; numai frecvențele undei în aer și în coardă coincid.

În fine se remarcă faptul că lungimea de undă a vibrațiilor unei coarde fixate la capete *variază discret* și *nu continuu*. Cu alte cuvinte numai anumite valori ale lungimii de undă sînt posibile, celelalte valori sînt „interzise". Acest limbaj nu este folosit în fizica clasică, ci se va întîlni în capitolele specifice fizicii cuantice.

13.6. Efectul Doppler

Unda emisă de o sursă de oscilații se propagă de la sursă pînă la receptorul care o detectează. Prin *detectarea* undei se înțelege măsurarea unei anumite mărimi caracteristice ei, de exemplu, *frecvența undei*. Dacă sursa și receptorul sînt în repaus unul față de celălalt, frecvența undei măsurată de receptor este egală cu frecvența undei emisă de sursă. Așa se întîmplă atît cu undele sonore cît și cu cele luminoase. Dacă însă sursa de oscilații este în mișcare față de receptor, frecvența undei măsurată de receptor diferă de aceea a undei emisă de sursa de oscilații. Acest fapt care se observă cînd sursa și receptorul sînt în mișcare unul față de celălalt, se numește efectul Doppler; acest efect este foarte important atît în știință cît și în tehnică.

Explicația efectului Doppler se va face folosind figura 13.15 care redă undele sferice ce izvorăsc din sursa de oscilații S. Dacă sursa se mișcă, de exemplu din S în S', undele sferice emise succesiv, se apropie unele de altele în sensul de mișcare al sursei. Distanța dintre suprafețele sferice de egală fază reprezintă lungimea de undă; se observă astfel că la receptorul R staționar, ajung în unitatea de timp, unde cu suprafețele sferice mai apropiate între ele în comparație cu situația în care sursa ar fi în repaus față de receptor. Întrucît suprafețele de egală fază sînt aparent mai apropiate, lungimea de undă aparentă λ_a este mai mică și deci frecvența undelor măsurată de receptor este, în acest caz, mai mare. Dacă sursa este staționară, iar receptorul se deplasează către sursa S, ca în figura 13.16, acesta întîlnește în unitatea de timp mai multe unde sferice, decît dacă receptorul ar fi fost fix și undele ar fi ajuns la el. Ca urmare receptorul în mișcare către sursă detectează o frecvență mai mare.

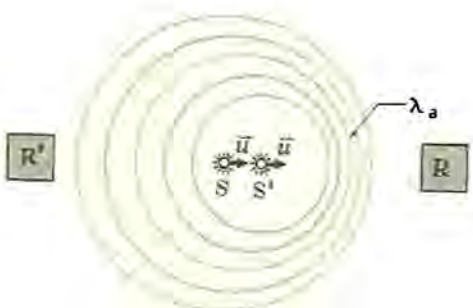


Fig. 13.15. La mișcarea sursei de oscilații S cu viteza $\vec{u}$ față de receptorul R, acesta detectează o lungime de undă aparentă λ_a. Față de R sursa de oscilații se apropie, iar față de R' sursa de oscilații se depărtează.

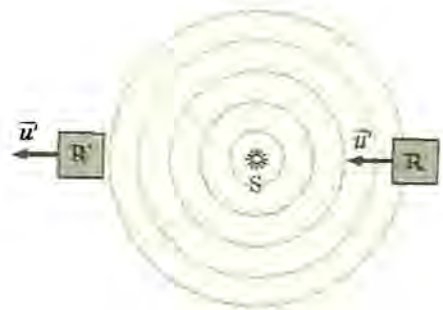


Fig. 13.16. Mișcarea receptorului față de sursa S cu viteza $\vec{u}'$. R se apropie de sursa de oscilații iar R' se depărtează.

În consecință, frecvența detectată de receptor crește dacă mișcarea relativă a sursei față de receptor îl apropie pe unul față de celălalt. Invers, dacă sursa S se depărtează de receptor, receptorul fiind în poziția R' în figura 13.15, printr-un raționament analog cu acela făcut mai înainte, se ajunge la conclu-

zia că frecvența măsurată de receptor scade. Dacă sursa stă pe loc iar receptorul R' se deplasează, în situația figurii 13.16, de la dreapta spre stînga, depărtîndu-se de sursă, undele sferice ajung la receptor mai rar în timp, decît dacă receptorul ar fi fost în repaus și deci acesta detectează o frecvență mai mică. Prin urmare, frecvența detectată scade, dacă mișcarea relativă a sursei față de receptor îi depărtează pe unul de celălalt.

Pentru a exprima cantitativ modificarea frecvenței în efectul Doppler se notează cu u viteza de deplasare a sursei S față de receptor, cu ν_S frecvența undelor emise de sursă și cu ν_R frecvența undelor măsurate de receptor. Undele studiate se propagă cu viteza v în mediul în care se găsesc sursa și receptorul; această viteză fiind o caracteristică a mediului respectiv nu este afectată de mișcarea sursei sau a receptorului.

În timpul t sursa emite $\nu_S \cdot t$ unde și, dacă sursa ar fi fixă, aceste unde ar parcurge distanța $v \cdot t$. Lungimea de undă se obține ca raportul între distanța $v \cdot t$ parcursă de unde și numărul de unde care acoperă această distanță, adică

$$\lambda = \frac{v \cdot t}{\nu_S \cdot t} = \frac{v}{\nu_S}$$

Relația obținută este bine cunoscută, dar ea a fost stabilită printr-un raționament nou care va fi folosit în cazul în care există mișcarea sursei sau a receptorului.

Dacă sursa se deplasează către receptor (fig. 13.15) cele $\nu_S \cdot t$ unde emise de sursă se vor răspîndi într-un spațiu mai mic decît $v \cdot t$, deoarece în timpul t sursa însăși s-a deplasat cu distanța $u \cdot t$. Aceasta înseamnă că numărul de unde $\nu_S \cdot t$ emise de sursă în timpul t se vor găsi în spațiul $v \cdot t - u \cdot t$, iar lungimea de undă aparentă, definită ca raportul între spațiul $v \cdot t - u \cdot t$ și numărul de unde $\nu_S \cdot t$ este

$$\lambda_a = \frac{v \cdot t - u \cdot t}{\nu_S \cdot t} = \frac{v - u}{\nu_S}$$

Frecvența corespunzătoare lungimii de undă λ_a este frecvența măsurată de receptor ν_R

$$\nu_R = \frac{v}{\lambda_a} = \frac{v \cdot \nu_S}{v - u} = \nu_S \frac{v}{v - u} \tag{13.28}$$

Dacă sursa se depărtează de receptor, numărul de unde $\nu_S \cdot t$ se întind pe distanța $v \cdot t + u \cdot t$; lungimea de undă aparentă este în acest caz $\lambda_a = (v + u)/\nu_S$. Adoptînd convenția că u este pozitiv pentru mișcarea sursei către receptor și negativ cînd sursa se îndepărtează de receptor, relația (13.28) este aplicabilă și în acest caz.

Presupunînd apoi că receptorul se mișcă spre sursă cu viteza u', viteza sa relativă față de unde este $v + u'$, iar numărul de unde pe care receptorul le întîlnește în timpul t este $(v + u')t/\lambda_a$ în care $\lambda_a = v/\nu_S$. Frecvența măsurată de receptor este

$$\nu_R = \frac{\textit{numărul de unde}}{\textit{timp}} = \frac{(v + u')t/\lambda_a}{t} = \frac{v + u'}{\lambda_a} = \nu_S \frac{v + u'}{v} \tag{13.29}$$

Dacă receptorul se depărtează de sursă, la el ajung mai puține unde în timpul t, $(v - u')t/\lambda_s$, și deci frecvența măsurată de receptor va fi $(v - u')/\lambda_s$. Convenția ca u' să fie pozitiv cînd receptorul se apropie de sursă și negativ cînd se depărtează de sursă, face ca relația (13.29) să se aplice și în acest caz.

În cazul în care atît sursa cît și receptorul sînt în mișcare unul față de altul, relația generală este

$$\nu_R = \nu_S \frac{v + u'}{v - u}$$

care se reduce la (13.28) pentru $u' = 0$ (R staționar) și la (13.29) pentru $u = 0$ (S staționar). În rezumat frecvența măsurată crește, $\nu_R > \nu_S$, la apropierea relativă, adică fie pentru $u > 0$ fie pentru $u' > 0$ și frecvența măsurată scade, $\nu_R < \nu_S$, la depărtarea relativă, adică fie pentru $u < 0$ fie pentru $u' < 0$.

Aceste rezultate sînt aplicabile în multe cazuri. De exemplu pentru undele sonore un observator percepe o frecvență mai mare, adică sunete mai înalte dacă sursa de sunete se apropie de el și o frecvență mai mică, adică sunete mai joase, dacă sursa se depărtează.

Efectul Doppler este foarte important în astronomie unde prin măsurarea frecvenței radiațiilor care provin de la stele sau galaxii îndepărtate se poate stabili mișcarea acestora față de planeta noastră. Prin astfel de măsurări se obține totdeauna o frecvență mai mică a radiațiilor luminoase caracteristice aștrilor respectivi. Aceasta înseamnă că lungimea de undă măsurată este mai mare decît cea reală; cu alte cuvinte are loc o „deplasare spre roșu" a radiațiilor luminoase respective (lumina roșie are lungimea de undă cea mai mare în domeniul vizibil). Valoarea variației frecvenței crește cu distanța de la Pămînt, ceea ce sugerează că întregul Univers este în expansiune, adică toți aștrii se îndepărtează spre limitele Universului, cu viteze din ce în ce mai mari pe măsură ce sînt mai depărtați de Pămînt. Aceasta este o problemă majoră a cosmologiei și studiul ei se bazează în principal pe efectul Doppler.

Expresia variației frecvenței pentru radiațiile electromagnetice diferă de aceea dată mai sus, deoarece viteza acestor radiații este egală cu c, viteza limită din natură. Diferența expresiilor respective nu schimbă aspectul calitativ care a fost descris mai sus.

Capitolul 14

Legile electromagnetismului

14.1. Fenomene fundamentale

Pe baza cunoştinţelor de care se dispune astăzi cu privire la structura substanţei, se poate afirma că atomii sînt formaţi din particule încărcate electric. Nucleul atomului conţine particule încărcate pozitiv — protonii —, iar în jurul nucleului se mişcă pe diferite orbite particule încărcate negativ — electronii —. Sarcina electrică pozitivă a unui proton este egală în mărime cu sarcina electrică negativă a unui electron. Această mărime este o constantă universală; sarcina electrică elementară are valoarea

$$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19} C$$

unde C — simbolul coulombului — reprezintă unitatea de sarcină electrică.

Numărul electronilor care orbitează în jurul nucleului unui atom este egal cu numărul protonilor din nucleu, ceea ce înseamnă că un atom în ansamblu este neutru. De asemenea, un corp, care este format dintr-un anumit număr de atomi sau de molecule, este neutru din punct de vedere electric în starea sa normală.

Primul fenomen fundamental al acestui domeniu al fizicii este acela al *separării sarcinilor electrice* de semne diferite. Din atom electronii pot fi scoşi prin diverse procedee; atomul din care lipseşte unul sau mai mulţi electroni rămîne încărcat electric pozitiv şi se numeşte ion pozitiv. Referitor la un corp macroscopic, format dintr-un număr foarte mare de atomi, se spune că este încărcat pozitiv dacă îi lipsesc electroni şi că este încărcat negativ dacă are un surplus de electroni.

Dacă un corp încărcat electric negativ este pus în contact cu un corp încărcat pozitiv, se arată experimental că electronii sînt atraşi de atomii cu lipsă de electroni. Cele două corpuri încărcate electric devin neutre dacă numărul electronilor excedentari este egal cu numărul atomilor încărcaţi pozitiv, sau cu alte cuvinte, dacă numărul sarcinilor negative este egal cu numărul sarcinilor pozitive (fig. 14.1). Dacă sarcinile de un semn depăşesc

ca număr pe cele de semn contrar, atunci după neutralizarea unui număr egal de sarcini pozitive cu sarcini negative, corpul rămîne încărcat cu sarcina care era excedentară. Acest fenomen fundamental se enunţă de obicei prin propoziţia: sarcinile electrice negative sînt atrase de sarcinile electrice pozitive. Pe de altă parte, experimente simple arată că *sarcinile electrice de acelaşi semn se resping*. Experimentele prin care se pune în evidenţă atracţia şi respingerea dintre sarcinile electrice sînt ilustrate în figura 14.2.

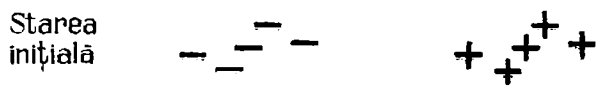


Fig. 14.1. Două corpuri conductoare încărcate cu acelaşi număr de sarcini electrice, dar de semn schimbat, puse în contact devine neutre din punct de vedere electric.

4

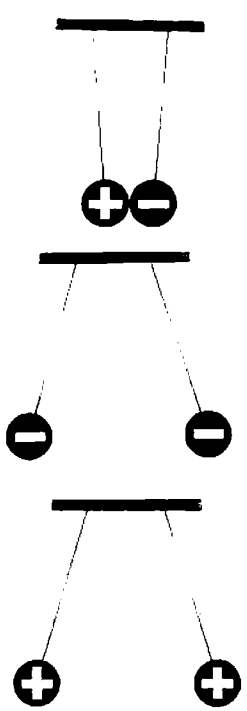


Fig. 14.2. Sarcinile electrice de semne contrarii se atrag şi sarcinile electrice de acelaşi semn se resping.

Separarea sarcinilor electrice este un fenomen extrem de important în electricitate. Această separare se poate face prin frecarea corpurilor; electrizarea obţinută prin frecarea corpurilor este de fapt separarea sarcinilor electrice. Un caz interesant este acela al electrizării picăturilor de apă în atmosferă, care provoacă încărcarea cu sarcini electrice a norilor. Separarea sarcinilor electrice se poate face şi în anumite dispozitive — *pile* sau *baterii electrice* — cu ajutorul cărora se obţine curentul electric (fig. 14.3). *Curentul electric* înseamnă mişcarea sarcinilor electrice în corpuri conductoare din punct de vedere electric şi prezintă importanţă, în primul rînd, din punctul de vedere al efectelor pe care le produce şi în al doilea rînd, deoarece permite transportul energiei electrice la distanţă.

Dintre efectele curentului electric, efectul magnetic se bazează pe o proprietate principială a mişcării sarcinilor electrice, care va permite ulterior stabilirea uneia din legile fundamentale ale electromagnetismului. Se arată experimental că un conductor care este parcurs de un curent electric *produce în vecinătatea lui un cîmp magnetic*. Acest cîmp magnetic este pus în evidenţă şi este studiat cu ajutorul unui magnet de dimensiuni mici, numit ac magnetic (fig. 14.4). Ceea ce este de la început demn de relevat este că polii unui magnet, denumiţi Nord şi Sud, au o proprietate asemănătoare cu o proprietate a sarcinilor electrice şi anume: *polii de semn contrar se atrag şi polii de acelaşi semn se resping*. Magneţii sînt caracterizaţi însă printr-o proprietate fundamentală care-i deosebeşte de sarcinile electrice şi anume inseparabilitatea. Într-adevăr, se poate efectua un experiment care permite stabilirea acestui fenomen fundamental al magnetismului; oricît de mult s-ar împinge diviziunea unui magnet perpendicular pe axa polilor, toate „foliile" obţinute, oricît de subţiri ar fi, prezintă cei doi poli magnetici; cu alte cuvinte *polii magnetici nu se pot separa*, aşa cum se vede în figura 14.5.

După cum s-a arătat în figura 14.4 un ac magnetic se orientează în cîmpul magnetic al unui curent perpendicular pe planul care conţine curentul electric şi centrul magnetului. În studiul cîmpului magnetic produs de curentul

electric se observă experimental *echivalența între o spiră parcursă de curent și un magnet.* Spira parcursă de curent se comportă ca un magnet, adică se orientează în cîmpul magnetic produs de un curent sau în cîmpul magnetic produs de un magnet, ca și cum axa polilor magnetici pentru spiră ar fi perpendiculară pe planul spirei, cum se observă în figura 14.6. Două spire parcurse

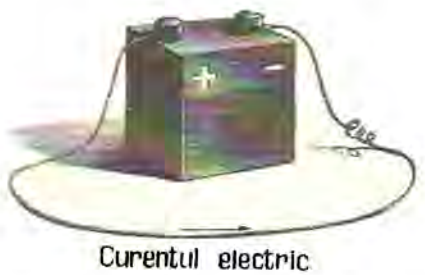


Fig. 14.3. O pilă electrică în care sarcinile electrice de un semn sînt separate de acelea de celălalt semn, produce un curent electric într-un conductor.

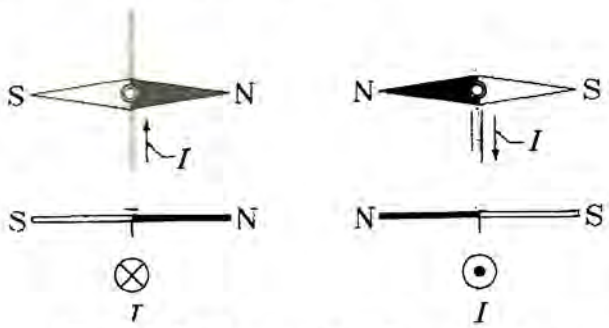


Fig. 14.4. Un ac magnetic se orientează într-un anumit mod în cîmpul magnetic produs de un curent electric și anume perpendicular pe planul care conține conductorul prin care trece curentul electric *I* și centrul acului magnetic.

de curent se orientează una față de cealaltă în același fel cum se orientează doi magneți unul față de celălalt (fig. 14.7).

Această comportare a spirelor parcurse de curenți electrici permite să se interpreteze magneții ca un ansamblu de curenți circulari microscopici, curenți produși de mișcarea electronilor pe traiectorii circulare. Nu se analizează

Fig. 14.5. Foliile obținute prin secționarea transversală a unui magnet conțin fiecare cei doi poli magnetici, *N* și *S*.

Fig. 14.5. O spiră parcursă de un curent electric se orientează într-un anumit mod în cîmpul magnetic produs de un curent electric și anume spira se așază în planul care conține conductorul parcurs de curentul *I'* și centrul spirei.

Fig. 14.7. Orientarea într-un anumit mod a două spire de curent una față de cealaltă și anume astfel încît spirele să fie în plane paralele iar curenții să fie paraleli și cu același sens.

aici în detaliu proprietățile magnetice ale substanțelor. Echivalența între curenții circulari și magneți relevată aici arată numai legătura între electricitate și magnetism.

În prezentarea fenomenelor fundamentale ale electromagnetismului, un loc important îl ocupă producerea unui curent electric prin mişcarea unui magnet. Experimental se arată că într-o spiră apare un curent electric, numit *curent electric indus*, dacă spira se află într-un cîmp magnetic variabil. Cîmpul magnetic variabil poate fi produs fie prin mişcarea unui magnet fie prin mişcarea unei spire parcurse de curent (fig. 14.8). Prin urmare un cîmp magnetic variabil este cauza curentului electric de inducţie.

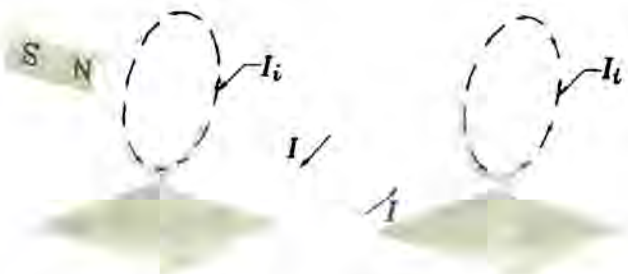


Fig. 14.8. Curentul electric indus I_i este provocat fie prin mişcarea unui magnet fie prin mişcarea unei spire de curent, mişcare produsă faţă de spira în care apare curentul de inducţie. În figură perechile de săgeţi arată mişcarea magnetului şi respectiv a spirei de curent.

Fig. 14.9. Asupra unui curent care se găseşte într-un cîmp magnetic se exercită o forţă.

În fine, vom încheia discuţia fenomenelor fundamentale ale electromagnetismului cu acela în care se descrie *forţa care se exercită asupra unui curent electric situat într-un cîmp magnetic*. Dacă se aduce un magnet în apropierea unui conductor parcurs de un curent electric, se constată apariţia unei forţe F care deplasează conductorul, aşa cum se vede în figura 14.9. Experimentul se poate efectua aducînd conductorul parcurs de curentul electric în cîmpul magnetic care este produs de un alt curent electric şi atunci se observă, ca în figura 14.10, că doi curenţi de acelaşi sens se atrag, iar doi curenţi de sensuri contrare se resping.

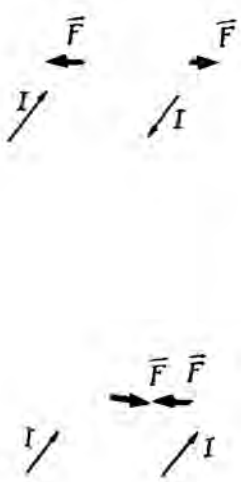


Fig. 14.10. Doi curenţi de acelaşi sens se atrag iar doi curenţi de sensuri contrare se resping.

Descrierea fenomenelor fundamentale făcută aici va permite, în continuare, să se scrie legile fundamentale ale electromagnetismului. Spre deosebire de celelalte capitole ale fizicii, electromagnetismul are cele mai multe legi; de altfel în aceasta constă dificultatea predării şi însuşirii electromagnetismului. Pentru scrierea legilor se introduc, prin definiţie, mărimile caracteristice acestui domeniu al fizicii şi apoi din experimentele descrise se extrage informaţia necesară pentru legea respectivă. Se reaminteşte că legile fizicii nu oferă o explicaţie cauzală; natura ne arată că fenomenul se întîmplă aşa cum îl descrie legea respectivă şi nu altfel.

14.2. Cîmpul electric în vid

O sarcină electrică, fixată pe un conductor plasat în vid, crează în jurul ei un cîmp electric $\vec{E}$. Acest cîmp este pus în evidenţă la diferite distanţe de sarcina electrică prin faptul că o altă sarcină, *sarcina de probă* q, aflată

în cîmpul $\vec{E}$ este supusă acțiunii unei forțe $\vec{F}$. Forța $\vec{F}$ este cu atît mai mare cu cît sarcina de probă q este mai mare. Acest fapt experimental permite să se scrie *legea forței în cîmpul electric*

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{14.1}$$

Datorită faptului că există sarcini electrice de semne diferite, semnul forței va fi diferit așa cum se vede în figura 14.11.

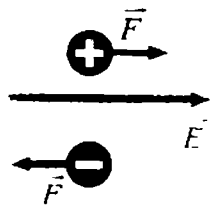


Fig. 14.11. Sensul forței $\vec{F}$ asupra sarcinii q în cîmpul electric $\vec{E}$ depinde de semnul sarcinii q

Cîmpul electric poate fi descris cu ajutorul *liniilor de cîmp*; acestea sînt traiectoriile pe care se mișcă o sarcină electrică pozitivă lăsată să se miște liber într-un cîmp electric. Configurația liniilor de cîmp în trei cazuri simple este arătată în figura 14.12. Liniile de cîmp sînt curbe deschise care pleacă de la sarcina pozitivă și se opresc pe sarcina negativă, deoarece se ia, prin convenție, sensul mișcării unei sarcini de probă pozitive.

Pentru a scrie expresia cîmpului electric produs de sarcinile electrice în vid, este nevoie de o mărime ajutătoare și anume fluxul electric printr-o suprafață închisă ψ numit și *fluxul electric total*, definit ca integrala de suprafață printr-o suprafață închisă a cîmpului electric $\vec{E}$

$$\psi \equiv \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{14.2}$$

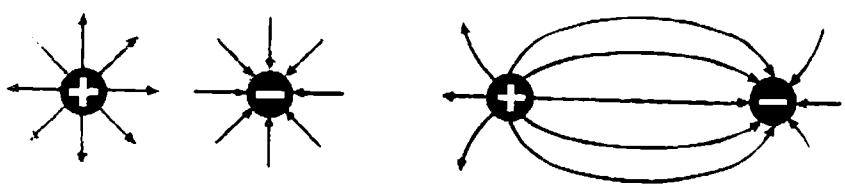


Fig. 14.12. Configurația liniilor de cîmp pentru o sarcină pozitivă, pentru una negativă și pentru un sistem de două sarcini de semne contrarii

unde $\mathrm{d}\vec{A}$ este elementul de arie, un vector orientat normal la aria $\mathrm{d}A$.

Lègea lui Gauss pentru cîmpul electric, afirmă că fluxul electric total ψ produs de sarcina electrică Q în vid este

$$\psi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{14.3}$$

Q fiind sarcina electrică din interiorul suprafeței închise pentru care se calculează fluxul ψ, iar ε_0 este permitivitatea vidului. Cu ajutorul relației de definiție (14.2) se poate scrie

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{14.4}$$

Așa cum se va vedea mai departe cîmpul electric depinde de permitivitatea mediului respectiv; pentru vid permitivitatea reprezintă o constantă universală

$$\varepsilon_0 = 8{,}855 \cdot 10^{-12} \text{ unități } SI$$

Legea lui Gauss permite calculul cîmpului electric $\vec{E}$ pentru diferite distribuții ale sarcinilor electrice. Suprafața închisă pentru care se calculează fluxul total, care poate avea orice formă, este o suprafață imaginară; forma ei nu prezintă importanță, dar pentru comoditatea calculului se preferă forme geometrice simple. De exemplu, în cazul calculului cîmpului electric al unei sarcini punctiforme, se va alege această suprafață închisă de forma unei sfere avînd sarcina electrică plasată în centrul sferei (v. § 14.3).

Pentru aplicarea legii lui Gauss trebuie să se acorde atenție convenției de semn. Conform celor arătate în figura 14.12 semnul fluxului va depinde de sensul liniilor de cîmp și deci de semnul sarcinii electrice din interiorul suprafeței:

$$\text{sarcina pozitivă } (Q > 0) : \psi > 0$$

$$\text{sarcina negativă } (Q < 0) : \psi < 0$$

Această convenție se aplică și în cazul unui flux elementar; acesta va fi pozitiv, dacă liniile de cîmp ies din suprafața elementară considerată și negativ dacă liniile de cîmp intră în suprafața elementară considerată. Suprafața are un sens caracterizat prin vectorul elementar $\mathrm{d}\vec{A}$.

Un cîmp electric nu este produs numai de sarcini electrice, el poate fi produs și de un cîmp magnetic variabil. Acest fenomen fundamental al electromagnetismului este descris de *legea lui Faraday* care are nevoie de două mărimi ajutătoare:

— circulația cîmpului electric $\vec{E}$ pe o curbă închisă definită ca integrala curbilinie a cîmpului E

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

numită și tensiune electromotoare,

— fluxul cîmpului magnetic $\vec{H}$ printr-o suprafață oarecare

$$\varphi = \iint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Faraday a constatat experimental că tensiunea electromotoare indusă într-o spiră închisă care se află în vid într-un cîmp magnetic variabil este egală cu produsul între variația în timp a fluxului magnetic prin suprafața al cărei contur se sprijină pe spira respectivă și permeabilitatea vidului μ_0, cu semnul minus,

$$\mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{14.5}$$

sau

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{14.6}$$

Efectele cîmpului magnetic depind de permeabilitatea mediului respectiv; pentru vid permeabilitatea este o constantă universală

$$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \text{ unități SI}$$

În legea lui Faraday se consideră tensiunea electromotoare într-o spiră din material conductor din punct de vedere electric, ca urmare efectul acestei t.e.m. este punerea în mișcare a electronilor din atomii materialului respectiv; în spiră circulă un curent electric — curentul indus — (fig. 14.13). Electronii sînt puși în mișcare de către un cîmp electric. Cîmpul electric $\vec{E}$ așa cum s-a arătat și în figura 14.13, se produce independent de prezența spirei conductoare. Liniile de cîmp electric sînt curbe închise concentrice direcției pe care are loc variația fluxului magnetic și situate în planuri perpendiculare pe această direcție. În ceea ce privește sensul liniilor de cîmp, acesta este cuprins în relația (14.6) dacă se introduce o convenție suplimentară și anume regula burghiului drept. Prin această regulă se asociază un sens de rotație cu un anumit sens de înaintare (fig. 14.14). Sensul de rotație este asociat cu sensul circulației cîmpului electric (t.e.m.), deci sensul lui $\vec{E}$, iar sensul de înaintare cu semnul derivatei $d\varphi/dt$. Întrucît în relația (14.6) membrul al doilea are semnul negativ rezultă că liniile de cîmp au sensul invers aceluia indicat de regula burghiului drept.

Forma curbei închise pe care se calculează t.e.m. din legea lui Faraday poate fi oarecare. De exemplu pentru curba C′ din figura 14.15, t.e.m. este aceeași ca și pentru curba C″, deoarece ambele curbe închid regiunea în care are loc variația fluxului magnetic. Pentru comoditatea calculului această curbă se presupune identică cu una din liniile de cîmp electric.

Pentru a încheia discuția asupra legii lui Faraday, trebuie subliniat că t.e.m. este diferită de zero numai dacă există o variație în timp a fluxului magnetic, și anume la creșterea lui φ în timp t.e.m. este negativă, iar la scăderea lui φ în timp t.e.m. este pozitivă. În figura 14.16 s-a arătat variația în timp a t.e.m., pentru două moduri de variație în timp a fluxului magnetic φ.

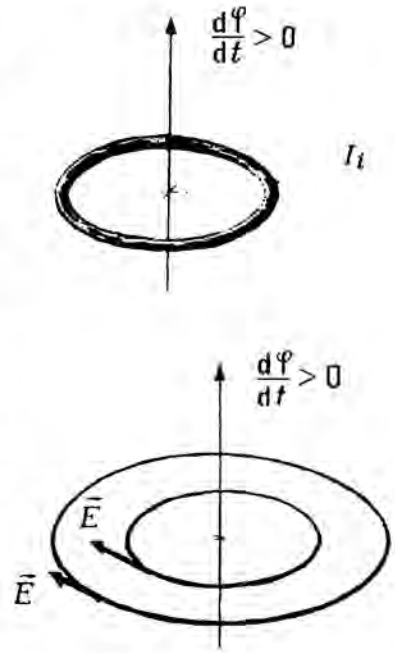


Fig. 14.13. Sensul curentului indus și deci al liniilor cîmpului electric $\vec{E}$ la creșterea fluxului magnetic ($d\varphi/dt > 0$)

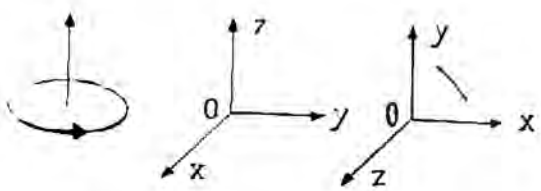


Fig. 14.14. Regula burghiului drept asociază un sens de rotație cu un anumit sens de înaintare Această regulă poate fi stabilită și cu ajutorul triedrului drept dacă se menționează că sensul de rotație este acela care aduce axa Ox peste axa Oy, iar sensul de înaintare este sensul axei Oz.

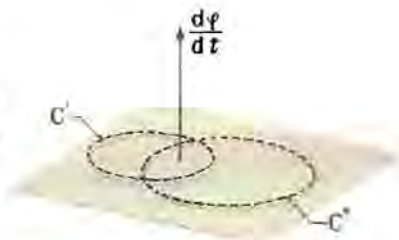


Fig. 14.15. T.e.m. este aceeași atît pentru curba C′ cît și pentru curba C″ deoarece prin suprafața închisă de ambele curbe, variația fluxului magnetic, $d\varphi/dt$, este aceeași.

În concluzie, în natură există două tipuri de cîmpuri electrice: *cîmpul electric produs de sarcini electrice* și *cîmpul electric produs de variația fluxului magnetic* — numit cîmp electric de inducție —. La primul liniile de cîmp sînt curbe *deschise*, pornind de la sarcinile pozitive și oprindu-se pe sarcinile negative, pe cînd la al doilea liniile de cîmp sînt curbe *închise*. În teoria cîmpurilor primul tip de cîmp este denumit *cîmp cu sarcini* (cîmp cu izvoare), iar al doilea

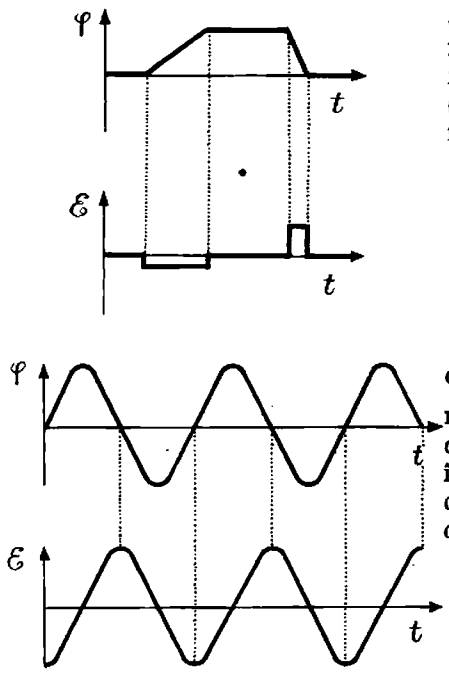


Fig. 14.15. t.e.m. $\mathcal{E}$ în timp pentru două moduri de variație a fluxului magnetic φ în timp. Valoarea t.e.m. este dată de mărimea derivatei $d\varphi/dt$ iar semnul t.e.m. este dat de variația cu semn schimbat a fluxului φ.

cîmp fără sarcini (cîmp fără izvoare) sau cîmp de inducție. Pentru caracterizarea acestor cîmpuri se folosește, datorită geometriilor liniilor de cîmp, fluxul electric total (fluxul printr-o suprafață închisă) în primul caz, și t.e.m. (circulația pe o curbă închisă) în al doilea caz. Aceste mărimi pot fi extinse, fiecare la celălalt tip de cîmp încît schematic se poate scrie

Cîmp cu sarcini	Cîmp de inducție
$\psi \neq 0$	$\psi = 0$
$\mathcal{E} = 0$	$\mathcal{E} \neq 0$

În cîmpul cu sarcini t.e.m. este nulă, deoarece, de exemplu pentru o curbă circulară, care are în centru sarcina Q, cîmpul $\vec{E}$ este perpendicular pe elementul de lungime $d\vec{l}$ al curbei și deci produsul scalar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ este nul. În cîmpul de inducție, fluxul total este nul deoarece, de exemplu pentru o suprafață închisă care nu conține regiunea cu cîmpul magnetic variabil, numărul liniilor de cîmp care intră în suprafața închisă este egal cu numărul liniilor de cîmp care ies.

14.3. Calculul cîmpului electric

Pentru calculul cîmpului electric produs de sarcina electrică Q la distanța r, se aplică legea lui Gauss, dată de relația (14.4), unei suprafețe sferice de rază r

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Cîmpul electric $\vec{E}$ fiind constant pe suprafața sferică din motive de simetrie, se poate scrie

$$E \oiint dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Rezultă expresia cîmpului electric creat de sarcina Q la distanța r

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{14.7}$$

Dacă în acest loc se găsește o altă sarcină electrică q atunci forța între cele două sarcini va fi

$$F = qE = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{14.8}$$

relație cunoscută și sub numele de *formula lui Coulomb*.

Să calculăm acum cîmpul electric în exteriorul şi în interiorul unui condensator plan. Pentru calculul cîmpului în exterior se alege o suprafaţă închisă care conţine ambele armături ale condensatorului; întrucît sarcina totală în interiorul acestei suprafeţe este nulă, cîmpul electric în exteriorul unui condensator este nul (fig. 14.17). Pentru calculul cîmpului în interior se alege o suprafaţă închisă care conţine o singură armătură şi presupunînd cîmpul diferit de zero şi constant numai între armături, a căror arie este A, rezultă

$$E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

de unde

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (14.9)$$

unde $\sigma \equiv Q/A$ este densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice.

În cazul unui corp metalic, sarcinile electrice se răspîndesc la suprafaţă. Pentru calculul cîmpului electric în interiorul corpului se consideră o suprafaţă Σ, de formă oarecare, în interiorul corpului, aşa cum se arată în figura 14.18. Deoarece în interiorul suprafeţei Σ sarcina electrică este nulă rezultă că oriunde în interiorul corpului metalic, cîmpul electric este nul.

Dacă între polii unui electromagnet există un cîmp magnetic variabil în timp, se poate calcula cîmpul electric E produs la distanţa r de axa electromagnetului; se foloseşte pentru aceasta legea lui Faraday. Considerînd curba închisă pe care se calculează t.e.m., ca avînd forma unui cerc şi identică cu o linie de cîmp, conform legii lui Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 \dot{\Phi}$$

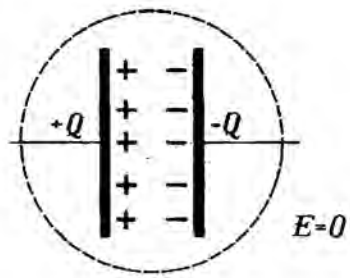
$$E \cdot \oint \mathrm{d}l = -\mu_0 \dot{\Phi}$$

$$E \cdot 2\pi r = -\mu_0 \dot{\Phi}$$

şi deci

$$E = -\frac{\mu_0 \dot{\Phi}}{2\pi r} \qquad (14.10)$$

unde $\dot{\Phi} = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$.



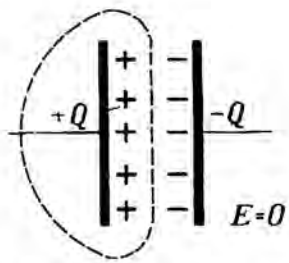


Fig. 14.17. Pentru calculul cîmpului electric în exteriorul şi în interiorul unui condensator plan se alege convenabil forma suprafeţelor închise.

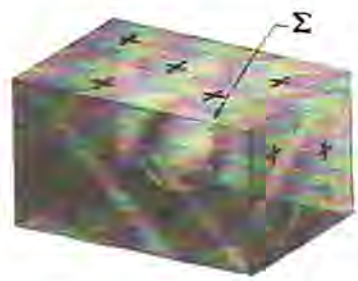


Fig. 14.18. Pentru calculul cîmpului electric în interiorul unui corp metalic încărcat electric se consideră suprafaţa Σ.

14.4. Potenţialul electric

Cîmpul electric al unei sarcini electrice Q fixe, la distanţa r de sarcina electrică, are valoarea dată de relaţia (14.7). Dacă la distanţa r se află o sarcină electrică q asupra ei acţionează forţa $F = qE$. Să calculăm lucrul forţei electrice, adică al lucrului *executat* de forţa electrică, care are ca efect respin-

gerea sarcinii q din punctul A în punctul B (fig. 14.19). Deoarece sarcina q se mişcă liber, nesupusă la legături, deplasarea are direcţia forţei F şi lucrul L_{AB} se poate scrie scalar

$$L_{AB} = \int_A^B F \cdot \mathrm{d}r = q \int_A^B E \cdot \mathrm{d}r \qquad (14.11)$$

Prin definiţie tensiunea electrică U între două puncte A şi B este

$$U_{AB} \equiv \int_A^B E \cdot \mathrm{d}r \qquad (14.12)$$

ceea ce face ca lucrul forţei electrice exprimat de relaţia (14.11) să se scrie

$$L_{AB} = q \cdot U_{AB}$$

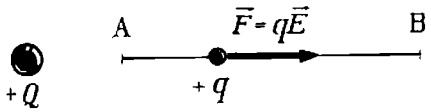


Fig. 14.19. La mişcarea liberă, nesupusă la legături, a sarcinii q în cîmpul electric al sarcinii Q, deplasarea are aceeaşi direcţie cu forţa $\vec{F} = q\vec{E}$.

Din această relaţie rezultă că tensiunea electrică este raportul între lucrul necesar pentru deplasarea sarcinii şi sarcina electrică. Cu ajutorul expresiei cîmpului electric, dat de relaţia (14.7) expresia (14.12) devine

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left|-\frac{1}{r}\right|_A^B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Potenţialul electric într-un punct se defineşte prin relaţia $V \equiv \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, astfel încît

$$U_{AB} = V_A - V_B \qquad (14.13)$$

adică tensiunea electrică între două puncte este egală cu diferenţa de potenţial dintre cele două puncte. Prin această definiţie a potenţialului o sarcină electrică pozitivă trece, sub acţiunea forţei electrice, de la potenţial mare la potenţial mic, atît în cîmpul produs de o sarcină pozitivă cît şi în cîmpul produs de o sarcină negativă, aşa cum se arată în figura 14.20.

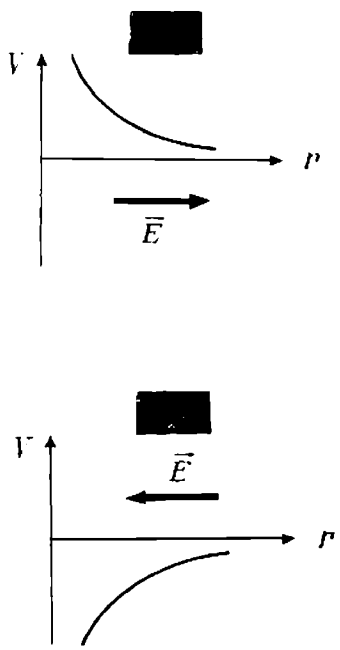


Fig. 14.20. Variaţia potenţialului V cu distanţa r pentru sarcinile $+Q$ şi respectiv $-Q$. Se observă că cîmpul electric $\vec{E}$ are sensul potenţialelor descrescînde.

Legăturile între diferenţa de potenţial şi cîmp, se poate scrie pe baza relaţiilor (14.12) şi (14.13)

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot \mathrm{d}r$$

Deoarece $\Delta V = V_B - V_A$ această relaţie se mai poate pune sub forma

$$-\Delta V = E \cdot \Delta r$$

de unde

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta r} \qquad (14.14)$$

Relaţia (14.14) corespunde relaţiei vectoriale $\vec{E} = -$ grad V. Cu alte cuvinte cîmpul electric este cu atît mai mare cu cît variaţia potenţialului este mai mare şi are sensul potenţialelor descrescînde. În figura 14.20 s-a indicat şi sensul cîmpului electric $\vec{E}$.

Se poate introduce și energia potențială a unei sarcini q în cîmpul electric; se poate ajunge astfel la o formă analogă cu situația în cîmpul gravitațional. Se definește energia potențială $W \equiv q \cdot V$, pentru sarcina electrică q, care se găsește în locul în care potențialul este V. Semnul energiei potențiale depinde atît de semnul sarcinii q cît și de acela al potențialului V, adică de semnul sarcinii Q care produce potențialul V. Expresia (14.11) a lucrului scrisă cu ajutorul diferenței de potențial este

$$L_{AB} = q(V_A - V_B)$$

Dacă se folosește energia potențială $W \equiv qV$, lucrul L_{AB} se poate scrie

$$L_{AB} = W_A - W_B \tag{14.15}$$

Folosind expresia variației energiei potențiale $\Delta W = W_B - W_A$, și scriind lucrul sub forma $L = F \cdot \Delta r$, se obține

$$F \cdot \Delta r = -\Delta W$$

de unde

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta r} \tag{14.16}$$

care corespunde relației vectoriale $\vec{F} = -\operatorname{grad} W$, adică forța care acționează asupra unei sarcini electrice (de astă dată semnul sarcinii electrice este indiferent) este cu atît mai mare cu cît variația energiei potențiale cu distanța este mai mare și are sensul energiilor potențiale descrescînde.

14.5. Cîmpul magnetic în vid

Cîmpul magnetic nu este produs de „sarcini magnetice". În orice mod s-ar alege o suprafață imaginară și închisă față de un magnet, se constată una din următoarele două situații. Suprafața închisă conține în interiorul său un număr egal de magneți elementari, care au un număr egal de poli Nord și poli Sud, de exemplu suprafața Σ' din figura 14.21, sau suprafața închisă nu conține nici un număr de magneți elementari, fiind exterioară magnetului, cum este, de exemplu, suprafața Σ'' din figura 14.21. Ca urmare suma „polilor magnetici" care se găsesc în orice suprafață închisă este egală cu zero și *legea lui Gauss* pentru cîmpul magnetic afirmă că *fluxul total* al cîmpului magnetic printr-o suprafață închisă este egal cu zero

$$\oiint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \tag{14.17}$$

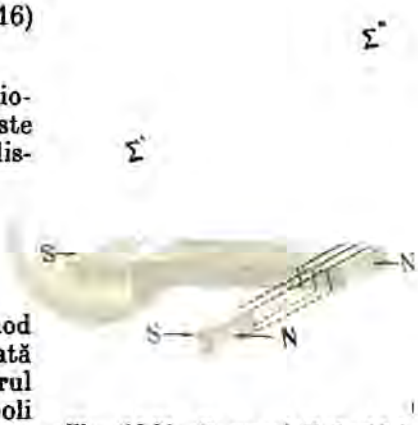


Fig. 14.21. O suprafață închisă față de un magnet conține fie un număr întreg de magneți elementari (Σ') fie nici un magnet elementar (Σ''). Un magnet elementar are totdeauna cei doi poli: *N* și *S*.

Cîmpul magnetic din jurul unui magnet se explorează cu ajutorul unui ac magnetic și se găsește o geometrie a liniilor de cîmp așa cum se știe din fizica de liceu; liniile de cîmp magnetic ale unui magnet pornesc de la polul Nord și se opresc la polul Sud. Cîmpul magnetic are în diferitele puncte din vecinătatea unui magnet valorile care satisfac relația (14.17).

A doua lege a cîmpului magnetic este *legea lui Ampère*, care exprimă cîmpul magnetic produs de un curent electric. Pentru aceasta este necesar

să se introducă o nouă noțiune: circulația cîmpului magnetic $\mathcal{H}$ definită ca integrala curbilinie pe o curbă închisă

$$\mathcal{H} \equiv \oint \vec{H} \cdot \vec{dl}$$

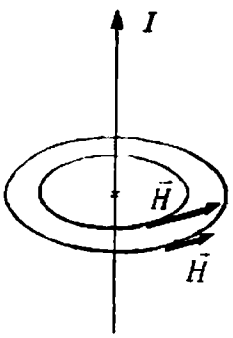


Fig. 14.22. Sensul liniilor cîmpului magnetic $\vec{H}$, produs de curentul electric I, este dat de regula burghiului drept schematizată în figura 14.14.

Această mărime numită și tensiunea magnetomotoare (pe scurt t.m.m.) este impusă de geometria liniilor de cîmp magnetic caracteristică pentru acest caz. Experimental se arată că liniile cîmpului magnetic produs de un curent electric sînt curbe închise, concentrice curentului I și situate în plane perpendiculare pe curentul I. Ca urmare circulația cîmpului magnetic (t.m.m.), $\mathcal{H}$, produsă de curentul electric I este diferită de zero, legea lui Ampère afirmînd că mărimea $\mathcal{H}$ este egală cu curentul I care străbate suprafața mărginită de curba închisă pe care se calculează t.m.m. În consecință legea lui Ampère se scrie

$$\mathcal{H} = I$$

sau conform definiției t.m.m., are forma

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I \tag{14.18}$$

Dacă suprafața mărginită de curba închisă pe care se calculează t.m.m., este străbătută de N curenți (sau N spire de curent) atunci

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = N \cdot I \tag{14.19}$$

Sensul liniilor de cîmp magnetic este dat de regula burghiului drept fig. (14.14) și este conținut în relația (14.18) și anume sensul de înaintare al burghiului este asociat cu sensul curentului I, iar sensul de rotație al burghiului cu sensul liniilor cîmpului $\vec{H}$ (fig. 14.22).

Curba închisă pe care se calculează t.m.m. poate avea o formă oarecare, dar pentru comoditatea calculului se ia identică cu o linie de cîmp.

Legea lui Ampère exprimată de relația (14.18) trebuie completată cu efectul magnetic al „curentului de deplasare în vid". După Maxwell acest curent are aceleași proprietăți cu curentul electric de conducție I și deci forma generală a legii lui Ampère devine

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I + I' \tag{14.20}$$

unde I' este curentul de deplasare a cărei expresie se stabilește în continuare.

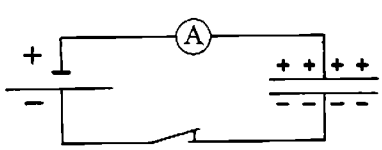


Fig. 14.23. La închiderea circuitului electric care conține un condensator are loc o deplasare a sarcinilor electrice de la baterie la armăturile condensatorului.

Curentul de deplasare

Noțiunea de curent de deplasare apare atunci cînd se analizează continuitatea curentului electric într-un circuit care conține un condensator. Curentul electric nu poate circula într-un circuit întrerupt; dacă un circuit electric conține un condensator, atunci un instrument electric arată că la închiderea circuitului se stabilește un curent de scurtă durată. Acest curent se

datorește faptului că sarcinile electrice s-au deplasat de la sursa de curent electric și au încărcat armăturile condensatorului (fig. 14.23).

Maxwell a arătat că curentul electric, care se stabilește la închiderea unui circuit ce conține un condensator, trebuie să circule și prin spațiul dintre armăturile condensatorului, chiar dacă acesta este vid, deoarece curentului electric îi este caracteristică continuitatea într-un circuit. Dacă între armăturile condensatorului ar exista un dielectric, continuitatea curentului în circuit se explică prin „curentul de deplasare a sarcinilor de polarizare a dielectricului". În realitate există și un „curent de deplasare în vid" a cărui natură nu se cunoaște, dar a cărui existență este confirmată de propagarea undelor electromagnetice.

Notînd cu I' curentul de deplasare în vid, expresia sa este dată de variația în timp a sarcinii electrice Q de pe armăturile condensatorului

$$I' = \frac{dQ}{dt}$$

Densitatea de suprafață a curentului de deplasare în vid, i', este

$$i' \equiv \frac{I'}{A} = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \qquad (14.21)$$

unde $\sigma \equiv \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 E$ este densitatea de suprafață a sarcinii electrice de pe armăturile condensatorului scrisă în funcție de cîmpul electric E dintre armături, conform relației (14.9).

Conform legii lui Ampère, dată de relația (14.20), rezultă că se produce cîmp magnetic atît în jurul unui curent de conducție I cît și în jurul unui curent de deplasare I'. Dar conform relației (14.21) curentul de deplasare depinde de variația cîmpului electric în timp; ca urmare apar linii de cîmp magnetic concentrice unei direcții de-a lungul căreia se situează cîmpul electric $\vec{E}$ variabil, așa cum se arată în figura 14.24. Se remarcă analogia între fenomenul descris în figura 14.24 și acela exprimat de legea lui Faraday și arătat în figura 14.13.

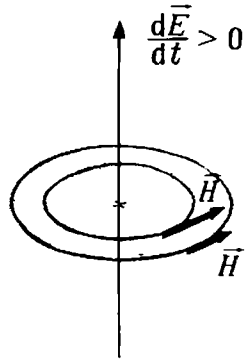


Fig. 14.24. Sensul liniilor de cîmp magnetic $\vec{H}$ în cazul în care există un cîmp electric $\vec{E}$ variabil cu $d\vec{E}/dt > 0$, conform regulei burghiului drept.

În concluzia acestui paragraf, trebuie subliniată deosebirea dintre cîmpul magnetic în vid și cîmpul electric în vid. *Cîmpul magnetic produs de magneți* este caracterizat printr-un flux total egal cu zero. Acest cîmp nu este analog cîmpului electric produs de sarcini electrice al cărui flux total este diferit de zero. *Cîmpul magnetic produs de curentul electric* este caracterizat printr-o circulație pe o curbă închisă diferită de zero. Acest cîmp magnetic este analog cîmpului electric de inducție, ambele avînd circulația pe o curbă închisă diferită de zero.

Exemplu.

Pentru calculul cîmpului magnetic din jurul unui conductor electric prin care circulă curentul I, se folosește legea lui Ampère. Pentru a obține valoarea cîmpului magnetic la distanța r de un conductor se consideră drept curbă închisă pentru calculul t.m.m., un cerc identic cu o linie de cîmp. Pe această curbă cîmpul magnetic este constant, H = ct; prin aplicarea legii lui Ampère se obține

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I$$

$$H \cdot \oint dl = I$$

$$H \cdot 2\pi r = I$$

de unde

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

14.6. Forţele în cîmpul electric şi magnetic

În primul rînd trebuie amintită *forţa electrică*, studiată în § 14.2 şi anume forţa $\vec{F}$ care acţionează asupra sarcinii q în cîmpul electric $\vec{E}$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Într-un cîmp magnetic, forţa care acţionează asupra unui magnet produce mişcarea de rotaţie a magnetului în cîmpul magnetic. Experimental se constată că magnetul se „orientează" în cîmpul magnetic $\vec{H}$, adică magnetul aşezat într-o anumită poziţie în cîmp se roteşte pînă ce ajunge într-o poziţie de echilibru în care stă în repaus. Pentru a caracteriza mişcarea magnetului şi poziţia sa de echilibru, într-un cîmp magnetic se asociază magnetului o mărime vectorială numită *moment magnetic*, a cărei direcţie este aceea a liniei care uneşte polul Sud cu polul Nord şi are sensul de la polul Sud la polul Nord. În poziţia de echilibru, momentul magnetic $\vec{m}$ este paralel şi de acelaşi sens cu cîmpul magnetic $\vec{H}$. Într-o altă poziţie a magnetului în cîmpul $\vec{H}$, asupra magnetului acţionează un cuplu de forţe $\vec{C}$ care se exprimă prin produsul vectorial

$$\vec{C} = \vec{m} \times \mu_0 \vec{H} \qquad (14.22)$$

unde $\vec{m}$ este momentul magnetic, aşa cum se arată în figura 14.25. Ataşînd magnetului această mărime se poate descrie mişcarea de rotaţie a magnetului în cîmpul magnetic prin relaţia (14.22). În adevăr cuplul $\vec{C}$ este maxim pentru $\alpha = \pi/2$ şi anume cînd momentul magnetic este perpendicular pe cîmpul magnetic $\vec{H}$. Efectul cuplului este rotirea magnetului pînă ce unghiul α devine nul şi deci $\vec{C} = 0$ (poziţia de echilibru stabil).

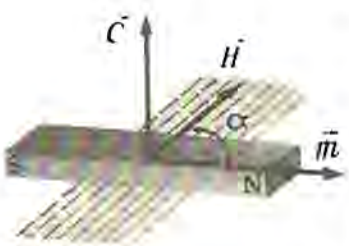


Fig. 14.25. Asupra unui magnet de moment magnetic $\vec{m}$ în cîmpul magnetic $\vec{H}$ acţionează cuplul $\vec{C} = \vec{m} \times \mu_0 \vec{H}$.

Asupra unui curent electric aflat într-un cîmp magnetic exterior acţionează o forţă numită *forţa lui Laplace* sau *forţa electromagnetică*. Forţa lui Laplace se exprimă cu ajutorul unei legi, *legea lui Laplace*, stabilită experimental şi anume această lege are forma

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \mu_0 \vec{H} \qquad (14.23)$$

unde l este lungimea conductorului prin care circulă curentul I, $\vec{H}$ este cîmpul magnetic şi μ_0 este permeabilitatea vidului, întrucît legea de mai sus este

scrisă presupunînd că fenomenul are loc în vid. Din formularea matematică a legii care exprimă forța lui Laplace rezultă că forța $\vec{F}$ este perpendiculară pe planul $(\vec{Il}, \vec{H})$; sensul forței este cuprins în relația (14.23) rezultînd din regula produsului vectorial, adică cei trei vectori, în ordinea indicată, formează un triedru drept (figura 14.26).

Curentul electric este o mișcare a sarcinilor electrice $I = q/t$, ceea ce înseamnă că legea lui Laplace se poate scrie și pentru sarcina q în mișcare cu viteza v; viteza v reiese din relația

$$I \cdot l = \frac{q}{t} \cdot l = q \cdot v$$

și deci

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \mu_0 \vec{H} \qquad (14.24)$$

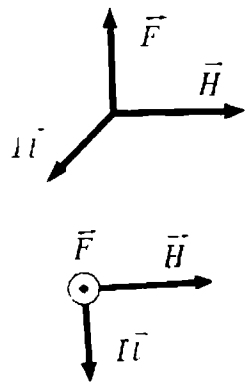


Fig. 14.26. Cei trei vectori din legea lui Laplace formează un triedru drept în ordinea în care sînt scriși în expresia matematică a legii: $\vec{F}$, $I\vec{l}$, $\vec{H}$.

O forță Laplace trebuie să existe și între doi curenți, deoarece fiecare curent se găsește în cîmpul magnetic al celuilalt. Aplicînd legea lui Ampère cîmpului magnetic al celor doi curenți, conform legii lui Laplace se ajunge la concluzia că doi curenți paraleli de același sens se atrag, iar doi curenți paraleli de sensuri contrarii se resping, așa cum se vede în figura 14.27. Evident că forțele care acționează asupra celor doi curenți sînt egale și de semn contrar, conform teoremei acțiunii și reacțiunii.

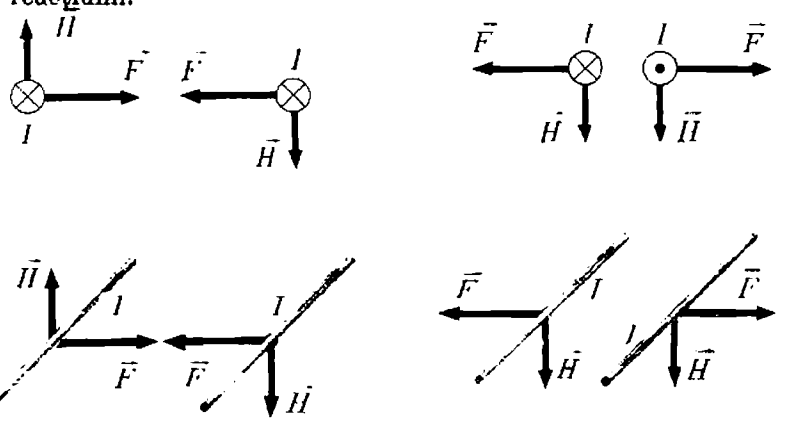


Fig. 14.27. Forțele între doi curenți paraleli de același sens sau de sensuri contrarii.

Aplicație: *Mișcarea în cîmpul electric și în cîmpul magnetic a particulelor încărcate electric.*

O particulă cu sarcina elementară e și masă m (de exemplu, un electron sau un proton) se poate mișca cu accelerația $\vec{a}$ într-un cîmp electric $\vec{E}$

$$m\vec{a} = e\vec{E}; \qquad \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$$

Datorită lucrului forțelor electrice, la străbaterea unei diferențe de potențial $U = V_2 - V_1$, particula capătă energia cinetică

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = eU$$

Din această ecuație se poate calcula viteza v căpătată de particulă cînd străbate distanța dintre doi electrozi între care există diferența de potențial U.

Dacă un electron cu sarcina $-e$ și cu viteza inițială v_0, intră într-un cîmp electric cu viteza v_0 perpendiculară pe cîmpul electric apare o accelerație $a = (-e/m)E$ de sens opus cîmpului. În cîmpul electric, mișcarea se face cu o viteză care are două componente: componenta perpendiculară pe cîmp, care este constantă și egală cu v_0, și componenta longitudinală, care este

$$v_l = a \cdot t = \frac{e}{m} E \cdot t$$

Mișcarea electronului în cîmpul electric este analogă mișcării în cîmpul gravitațional a unui obiect aruncat pe o direcție orizontală cu o viteză inițială (fig. 14.28).

Dacă un electron este „injectat" transversal cu viteza v într-un cîmp magnetic $\vec{H}$, atunci asupra lui acționează forța lui Laplace

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \mu_0 \vec{H}$$

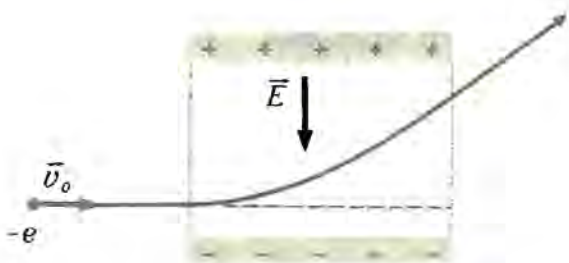


Fig. 14.28. Curbarea traiectoriei unei particule încărcate electric într-un cîmp electric are loc numai în regiunea care este sediul cîmpului electric.

Fig. 14.29. O particulă încărcată electric se mișcă într-un cîmp magnetic exterior după o traiectorie circulară.

Forța fiind perpendiculară pe viteză, electronul se va mișca pe o traiectorie circulară a cărei rază R rezultă din egalitatea între forța lui Laplace și forța de inerție centrifugă, adică în valoarea absolută

$$ev\mu_0 H = \frac{mv^2}{R}; \qquad R = \frac{mv}{\mu_0 eH}$$

unde m este masa electronului. Această mișcare poate dura nedefinit; electronul nu capătă energie și nici nu este frînat în cîmpul magnetic, deoarece forța este continuu perpendiculară pe viteză.

Dacă electronul nu este injectat în cîmpul magnetic, ci pătrunde în cîmpul magnetic din exteriorul regiunii cu cîmp, atunci el parcurge un semicerc cu viteza constantă și părăsește cîmpul magnetic cu aceeași viteză cu care a pătruns în cîmp (fig. 14.29).

Dacă însă electronul este injectat în cîmpul magnetic paralel cu liniile de cîmp, forța lui Laplace este zero și nu are loc nici o deviație a mișcării.

Dacă electronul este injectat cu o orientare oarecare, atunci, datorită componentei transversale a vitezei, execută o mișcare circulară, iar datorită componentei longitudinale execută o deplasare în lungul liniilor de cîmp. Mișcarea rezultantă este o traiectorie elicoidală cu pasul constant (fig. 14.30).

Aplicație

Submarinul electromagnetic constituie o interesantă și foarte recentă utilizare a legii lui Laplace. Pe cele două două părți laterale ale corpului submarinului fabricat din material plastic se găsesc doi electrozi longitudinali, conectați la o sursă de curent electric. În secțiune, aceștia apar ca în figura 14.31. Curentul electric I circulă prin apa sărată a mării sau a oceanului, care oferă o bună conductibilitate electrică. Liniile curentului I intersectează liniile

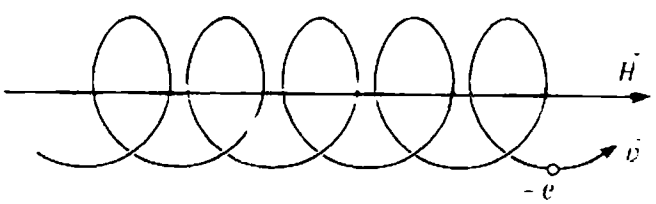


Fig. 14.30. Dacă particula încărcată electric are o componentă a vitezei paralelă cu cîmpul magnetic exterior $\vec{H}$, traiectoria este o elice a cărei axă este paralelă cu cîmpul magnetic $\vec{H}$.

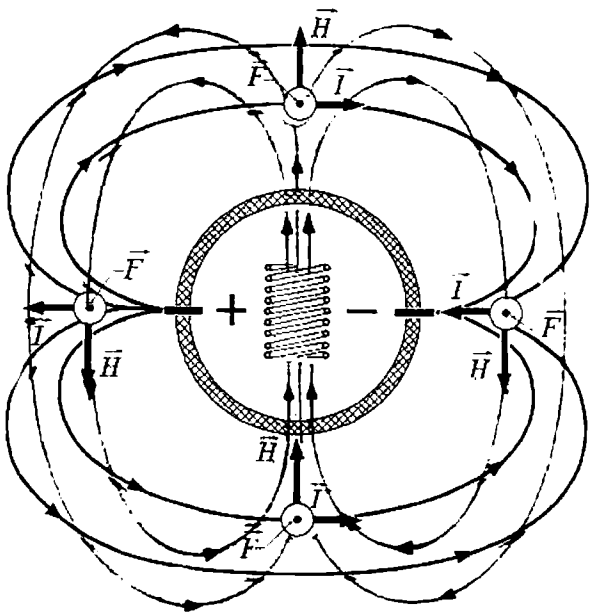


Fig. 14.31. Mișcarea sarcinilor electrice (curentul I) în mediul marin, în cîmpul magnetic $\vec{H}$ produce forța electromagnetică $\vec{F}$, care are același sens în toate cele patru părți ale submarinului electromagnetic.

cîmpului magnetic $\vec{H}$, cum se vede în figură; în încercările făcute, cîmpul magnetic a fost produs fie de un solenoid, fie de un magnet permanent. După cum arată figura, forța lui Laplace este peste tot de același sens și are ca efect împingerea apei în lungul submarinului. Conform teoremei acțiunii și reacțiunii, apa împinge submarinul în sens invers cu o forță egală.

Notă

Prima mărime introdusă în studiul electricității este *sarcina electrică*; pentru măsurarea acestei mărimi se poate folosi o unitate „naturală", și anume, sarcina electrică elementară e. Sarcina electrică elementară este sarcina electrică a particulelor elementare care intră în constituția substanței: electronul, mezonul, protonul etc.

Întrucît sarcina electrică elementară este o unitate prea mică, se alege prin convenție o unitate mai mare: coulombul, definit astfel

$$1\,C = \frac{1}{1{,}60 \cdot 10^{-19}}\, e = 0{,}624 \cdot 10^{19}\, e$$

N

S

Cu ajutorul relaţiilor care leagă între ele diferitele mărimi electrice şi magnetice sau al relaţiilor de definiţie se pot stabili unităţile de măsurare a mărimilor întîlnite în electricitate şi magnetism.

Denumirile unităţilor se formează din relaţiile între unităţi sau se introduc, prin definiţie, denumiri noi. De exemplu unitatea de cîmp electric, are denumirea care rezultă din relaţia între unităţile derivate şi anume, volt pe metru, dar pentru unităţile curentului electric, tensiunii electrice etc. se introduc denumiri noi: amper, volt etc.

Curentul electric $\equiv \frac{\text{Sarcina electrică}}{\text{Timp}}$ $\quad \frac{1\text{C}}{1\text{s}} \equiv 1\text{A}$

Tensiunea electrică / Potenţialul $= \frac{\text{Energia}}{\text{Sarcina electrică}}$ $\quad \frac{1\text{J}}{1\text{C}} \equiv 1\text{V}$

Cîmpul electric $= \frac{\text{Potenţialul}}{\text{Lungime}}$ $\quad \frac{1\text{V}}{1\text{m}} = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

T.E.M. $\equiv$ Cîmp electric $\times$ Lungime $\quad 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \times 1\text{m} = 1\text{V}$

Capacitatea $\equiv \frac{\text{Sarcina electrică}}{\text{Potenţial}}$ $\quad \frac{1\text{C}}{1\text{V}} \equiv 1\text{F}$

Fluxul electric = Cîmp electric $\times$ Arie $\quad 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \times 1\text{m}^2 = 1\text{V} \cdot \text{m}$

Permitivitatea $= \frac{\text{Sarcina electrică}}{\text{Flux electric}}$ $\quad \frac{1\text{C}}{1\text{V} \cdot \text{m}} = 1\,\frac{\text{F}}{\text{m}}$

T.M.M. = Curentul electric $\quad 1\text{A}$

Cîmpul magnetic $= \frac{\text{T.M.M.}}{\text{Lungime}}$ $\quad \frac{1\text{A}}{1\text{m}} = 1\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

Fluxul magnetic $\equiv$ Cîmp magnetic $\times$ Arie $\quad 1\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \times 1\text{m}^2 = 1\text{A} \cdot \text{m}$

Permeabilitatea $= \frac{\text{T.E.M.}}{\text{Flux magn/timp}}$ $\quad \frac{1\text{V} \times 1\text{s}}{1\text{A} \cdot \text{m}} = 1\,\frac{\text{H}}{\text{m}}$

La ultima unitate s-a folosit henryul, unitatea de inductanţă, definită prin relaţia între unităţi

$$1\text{ H} \equiv \frac{1\text{ V} \times 1\text{ s}}{1\text{ A}}$$

Cu precizarea asupra unităţilor de permitivitate şi permeabilitate, cele două constante universale folosite în paragrafele anterioare se vor scrie

$$\varepsilon_0 = 8{,}855 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}} \qquad \mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{H}}{\text{m}}$$

Capitolul 15

Cîmpul electromagnetic

15.1. Semnificaţia fluxului total

Pentru caracterizarea cîmpurilor vectoriale se foloseşte fluxul total definit ca fluxul vectorului cîmp printr-o suprafaţă închisă. Cu ajutorul acestei mărimi se defineşte divergenţa cîmpului, mărime foarte importantă pentru studiul cîmpului electromagnetic.

Fluxul total definit prin relaţia

$$\psi \equiv \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{15.1}$$

reprezintă produsul între componenta normală la suprafaţă, medie şi aria suprafeţei Σ. Dacă cîmpul nu are componentă normală, ca de exemplu în cazul cîmpului electric de inducţie, fluxul electric total este nul. Semnificaţia acestei mărimi este mai accesibilă dacă se recurge la reprezentarea cîmpului cu ajutorul liniilor de cîmp; densitatea liniilor de cîmp este o măsură a intensităţii cîmpului. Componenta normală a cîmpului este dată de numărul liniilor de cîmp care străbat unitatea de suprafaţă.

Pentru stabilirea semnului fluxului total se face apel la convenţia adoptată cu ocazia enunţării legii lui Gauss şi anume semnul fluxului ψ este dat de semnul sarcinei electrice Q

$$\psi > 0 \quad \text{pentru} \quad Q > 0$$

$$\psi < 0 \quad \text{pentru} \quad Q < 0$$

Ţinînd seama şi de convenţia făcută în § 14.2 şi anume, liniile de cîmp pornesc de la sarcinile pozitive şi se opresc la sarcinile negative, se poate lega semnul fluxului total de sensul liniilor de cîmp prin suprafaţa închisă. Cînd liniile de cîmp ies din suprafaţă, ceea ce are loc cînd $Q > 0$, fluxul total este pozitiv, iar cînd liniile de cîmp intră în suprafaţă, pentru cazul $Q < 0$, fluxul total este negativ.

Aceste considerații se extind asupra unei suprafețe deschise. Fie o suprafață elementară a cărei orientare este caracterizată prin vectorul elementar $d\vec{A}$, normal la suprafață. Fluxul elementar $d\psi$ prin suprafața elementară deschisă este pozitiv, dacă sensul liniilor de cîmp este același cu al vectorului $d\vec{A}$ și negativ, dacă sensul liniilor de cîmp este contrar sensului vectorului $d\vec{A}$ (fig. 15.1).

Cînd se consideră o suprafață închisă prin care se calculează fluxul total, sarcinile pot să existe atît în interiorul ei, cît și în exterior. Ca urmare, pentru o suprafață închisă pot să existe linii de cîmp care intră în suprafață — linii incidente — cînd sarcina este în exteriorul suprafeței și linii de cîmp care ies

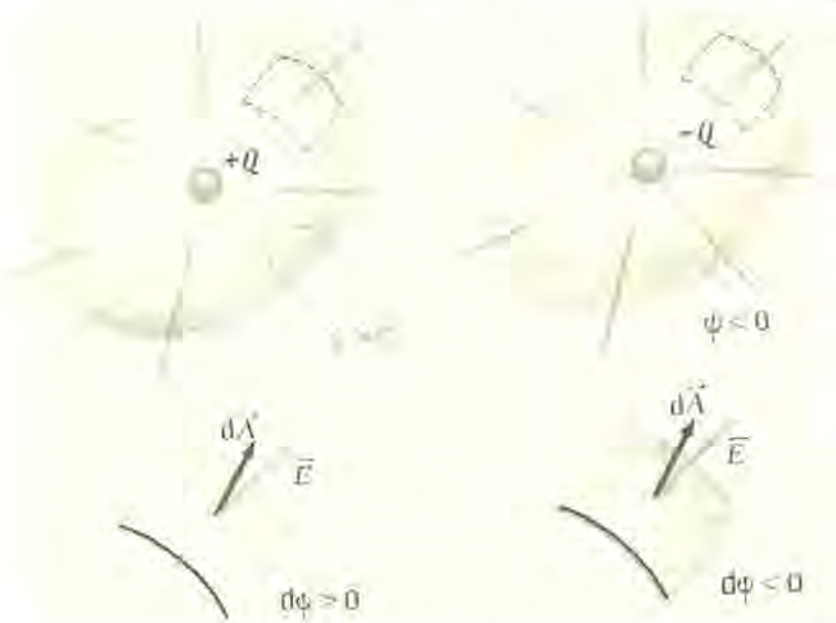


Fig. 15.1. Semnul fluxului ψ pentru o suprafață închisă care conține în interior sarcina $+Q$ și respectiv $-Q$, precum și semnul fluxului elementar $d\psi$ printr-o suprafață elementară deschisă față de care liniile cîmpului $\vec{E}$ ies din suprafață și respectiv, intră în suprafață.

din suprafață — linii emergente — create de sarcina din interiorul suprafeței închise. În această situație semnul fluxului este dat de sensul liniilor de cîmp care sînt în număr mai mare. Astfel, dacă liniile emergente sînt în exces, ceea ce corespunde la $Q > 0$ în interiorul suprafeței închise, fluxul este pozitiv ($\psi > 0$). Dacă liniile incidente sînt în exces, ceea ce înseamnă că în interiorul suprafeței este o sarcină negativă, $Q < 0$, fluxul este negativ ($\psi < 0$). Aceste situații au fost ilustrate în figura 15.2. În cazul unei regiuni fără sarcini, în care există un cîmp uniform, fluxul total este nul, $\psi = 0$, deoarece numărul liniilor emergente este egal cu acela al liniilor incidente.

Pentru înțelegerea considerațiilor făcute mai sus se poate apela la o analogie hidraulică. Astfel, fluxul poate reprezenta cantitatea de apă a unui fluviu. Pentru o suprafață închisă, imaginară, care ar cuprinde o porțiune din fluviu, fluxul, ca măsură a cantității de apă, ar fi funcție de cantitatea de apă în exces într-un anumit sens și anume, un flux total pozitiv are semnificația unei cantități de apă mai mari la ieșirea din suprafață decît cantitatea de apă la intrarea în suprafața închisă. Fluxul total pozitiv, indică,

în acest caz, prezența izvoarelor în interiorul suprafeței închise, tot așa după cum fluxul electric total pozitiv indică prezența sarcinilor electrice în interiorul suprafeței închise respective.

Spre exemplificare se consideră Dunărea într-o anumită regiune și anume acolo unde traversează Carpații, la intrarea ei în țara noastră. Pentru o suprafață închisă, imaginară, care ar cuprinde o regiune destul de întinsă, cam cît Oltenia și Banatul, fluxul total al Dunării este pozitiv, deoarece din această suprafață fluviul iese cu o cantitate de apă mai mare decît aceea cu care intră în suprafața închisă considerată. Interpretarea acestui rezultat este că, în suprafața închisă considerată, există izvoare (de exemplu: Cerna, Timocul. Jiul) care măresc debitul Dunării.

Analogia hidraulică poate fi dusă mai departe, considerînd de data aceasta cîmpul de viteze al unui curent de apă, adică al unei ape curgătoare. Curgerea unei ape se caracterizează prin liniile de curent astfel încît numărul liniilor de curent pe unitatea de suprafață normală la curgere este proporțional cu viteza de curgere. Pentru o curgere uniformă ($\vec{v} = \text{const}$), numărul liniilor de curent pe unitatea de suprafață normală la direcția de curgere rămîne constant și fluxul total al cîmpului de viteze printr-o suprafață închisă, determinat cu ajutorul liniilor de curent, este nul. Dacă apa curgătoare străbate o regiune cu pantă mai mare, viteza de curgere $\vec{v}$ crește, iar în reprezentarea folosită crește numărul liniilor de curent prin unitatea de suprafață normală la curgere. Fluxul total calculat pentru o suprafață închisă care cuprinde începutul pantei este pozitiv, deoarece numărul liniilor de curent emergente depășește numărul liniilor de curent incidente

$$\oiint \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A} > 0$$

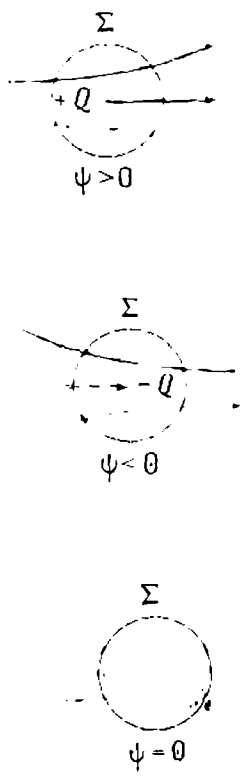


Fig. 15.2. Semnul fluxului total ψ prin suprafața închisă Σ în funcție de sarcina electrică din interiorul suprafeței Σ: $+Q$, $-Q$ și $Q = 0$

Aceasta înseamnă că în regiunea respectivă există „izvoare" pozitive pentru vectorul viteză $\vec{v}$, care au ca efect creșterea vitezei de curgere a apei. Continuînd discuția mai departe, se precizează că acolo unde panta dispare sau se micșorează există „izvoare" negative pentru vectorul viteză, care au ca efect scăderea vitezei de curgere a apei. „Izvoarele" vectorului viteză, în cazul curgerii unei ape, constituie analogia sarcinilor electrice din cazul vectorului cîmp electric.

Cu aceste precizări se poate da semnificația fizică a *divergenței*, mărime care servește pentru caracterizarea cantitativă a densității sarcinilor sau a izvoarelor. Asupra definirii acestei mărimi, a se vedea și Anexa 4. Conform teoremei lui Green-Ostrogradski fluxul total ψ se poate scrie

$$\psi \equiv \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$= \oiint_{\Sigma} E_x \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + E_y \cdot \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + E_z \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iiint \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

unde E_x, E_y și E_z sînt componentele cîmpului electric $\vec{E}$ pe cele trei axe, iar dx, dy și dz sînt lungimile elementului de volum. Se folosește aici semnul de derivată parțială (v. Anexa 4), deoarece cîmpul electric variază atît în funcție de coordonatele x, y și z, cît și de timp.

Prin definiție, divergența cîmpului $\vec{E}$ este

$$\operatorname{div} E \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{15.2}$$

Relația lui Green-Ostrogradski devine astfel

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint \operatorname{div} \vec{E} \cdot dv \tag{15.3}$$

unde dv este elementul de volum, caracteristic spațiului mărginit de suprafața închisă Σ.

Din relația (15.2) prin care s-a definit divergența se observă că această mărime este o funcție de punct. Relația (15.3) permite o interpretare mai intuitivă a divergenței și anume, *divergența medie este raportul dintre fluxul total și volumul mărginit de suprafața închisă pe care se calculează fluxul total.*

Expresiile scrise mai înainte se pot aplica oricărui cîmp vectorial. Dacă aceste expresii se aplică cîmpului electric $\vec{E}$, este vorba de fluxul electric total și de divergența cîmpului electric. În cazul cîmpului electric, dacă fluxul electric total este diferit de zero, înseamnă că divergența cîmpului electric este diferită de zero. Deoarece fluxul total se datorește sarcinilor electrice, *semnificația fizică a divergenței este dată de densitatea de volum a sarcinilor electrice.* Cu cît pornesc mai multe linii de cîmp din suprafața închisă considerată, cu atît fluxul electric total este mai mare și deci, cu atît divergența cîmpului electric va fi și ea mai mare (figura 15.3). Divergența este mai mare acolo unde există o densitate de volum a sarcinilor electrice mai mare.

Semnul fluxului electric total impune semnul divergenței: divergența este pozitivă în regiunea în care exced sarcinile electrice pozitive și este negativă în regiunea în care sarcinile electrice negative sînt în exces. Divergența este nulă, dacă fluxul electric total este nul ($\psi = 0$).

Conform relației (15.2) divergența este nulă în regiunea din spațiu, unde derivatele componentelor vectorului cîmp electric sînt nule

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Să ne întoarcem la alt tip de cîmp și anume la cîmpul de viteze în cazul curgerii unei ape. Dacă curgerea are loc pe direcția x, viteza de curgere variază numai pe această direcție și deci în calculul divergenței acestui cîmp de viteze intervine numai derivata dv/dx. Pentru curgerea uniformă ($\vec{v} = \text{ct}$) viteza nu variază cu x și deci $dv/dx = 0$, ceea ce conduce la $\operatorname{div} \vec{v} = 0$; cu alte cuvinte nu există „izvoare" pentru vectorul viteză. În cazul existenței unei pante derivata vitezei pe direcția de curgere nu este nulă, $dv/dx \neq 0$ și deci $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$, adică există „izvoare" pentru cîmpul de viteze.

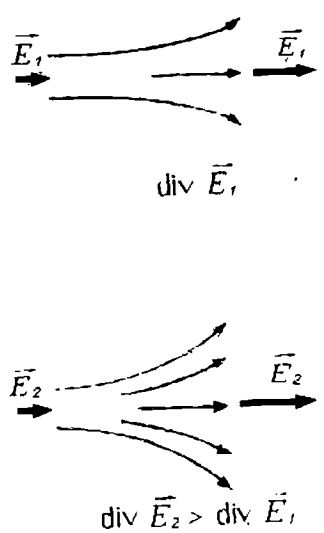


Fig. 15.3. Reprezentarea cu ajutorul liniilor de cîmp a două regiuni din cîmpul $\vec{E}$ cu divergențe diferite. Intensitatea cîmpului electric în cele două regiuni s-a notat cu $\vec{E}_1$ și respectiv cu $\vec{E}_2$.

15.2. Semnificația circulației

În studiul cîmpurilor este necesară, pe lîngă noțiunea de flux total și aceea de circulație. Cu ajutorul acestei mărimi se introduce rotorul, mărime de asemenea foarte importantă pentru caracterizarea cîmpului electromagnetic, dar mai dificil de intuit decît divergența.

Circulația definită ca integrala curbilinie pe o curbă închisă,

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (15.4)$$

reprezintă produsul între componenta tangențială medie la curba C și lungimea curbei C. Dacă cîmpul nu are componentă tangențială, ca de exemplu, în cazul cîmpului electric produs de sarcini electrice, circulația, numită tensiunea electromotoare, este nulă. Ca și pentru fluxul total, înțelegerea circulației este mai ușoară dacă se recurge la reprezentarea cîmpului prin intermediul liniilor de cîmp. Ca în cazul oricărui cîmp, densitatea liniilor de cîmp este o măsură a intensității cîmpului; în cazul cîmpurilor pentru care circulația este diferită de zero, liniile de cîmp sînt închise.

În ceea ce privește semnul circulației, acesta depinde de sensul convențional de parcurgere a curbei imaginare C pe care se calculează integrala dată de relația (15.4). De obicei se alege ca sens de parcurgere a curbei C sensul trigonometric direct, ceea ce corespunde unui sens convențional pentru normala la suprafața mărginită de curba C; circulația poate fi pozitivă sau negativă, după cum sensul liniilor de cîmp coincide sau nu cu sensul de parcurgere a curbei C (fig. 15.4).

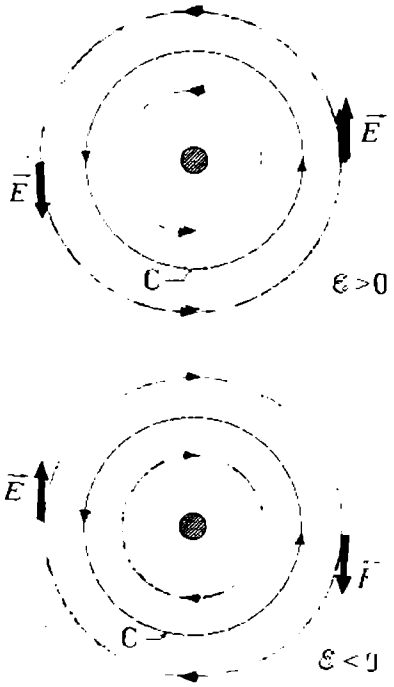


Fig. 15.4. Semnul circulației $\mathcal{E}$ este dat de sensul liniilor de cîmp față de un sens convențional ales pe curba imaginară C pe care se calculează circulația.

Adoptarea unui sens de parcurgere a curbei C este foarte importantă pentru calculul circulației. Iată, de exemplu, cum se face calculul circulației pentru un cîmp uniform. Din figura 15.5 se vede că în acest caz curba C se alege de forma unui pătrat pentru comoditatea calculului. Circulația pe curba care formează perimetrul pătratului se compune din patru circulații parțiale corespunzătoare celor patru laturi ale pătratului. Pe două din ele circulațiile sînt nule, deoarece cîmpul este perpendicular pe curba C, iar pe celelalte două laturi circulațiile sînt egale și de semn contrar, deoarece prin parcurgerea curbei C în sensul adoptat, pe o latură cîmpul are același sens cu sensul de parcurgere, iar pe cealaltă latură cîmpul are sensul opus. În consecință circulația în cîmpul uniform este zero. În cazul unui cîmp radial, pentru calculul circulației se alege o curbă circulară, sarcina care produce cîmpul fiind în centrul curbei. În fiecare punct al curbei, cîmpul este perpendicular pe curba C (fig. 15.6) (cîmpul nu are componentă tangențială la curba C) și deci circulația este de asemenea nulă.

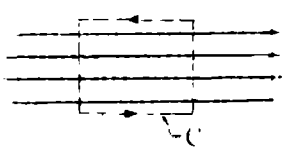


Fig. 15.5. În cîmpul uniform circulația este egală cu zero.

Din aceste exemple, se poate conchide, prin generalizare, că circulația într-un cîmp cu liniile de cîmp deschise este totdeauna zero. Un astfel de cîmp este cîmpul electric produs de sarcini electrice; la acest cîmp t.e.m. este totdeauna egală cu zero.

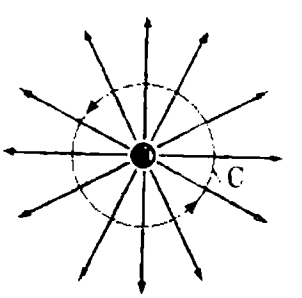


Fig. 15.6. În cîmpul radial circulația este egală cu zero.

Conceptul de circulație este mai dificil de înțeles decît acela de flux total; analogia hidraulică ajută totuși și de data aceasta. În cazul unei ape curgătoare, se pot forma vîrtejuri — locuri în care liniile de curent se curbează și chiar se închid. În hidraulică liniile de curent sînt analoge liniilor de cîmp

ale cîmpului electric sau magnetic. La o apă curgătoare vîrtejurile se suprapun peste curgerea laminară. Vîrtejurile pot apare și într-o apă stătătoare, de exemplu, ele fiind produse de mișcarea de rotație a unui corp care antrenează straturile de apă adiacente corpului. În alt caz, într-un bazin în care apa se scurge printr-o deschidere circulară practicată pe fundul bazinului se formează de obicei un vîrtej deasupra orificiului de scurgere a apei. În asemenea cazuri viteza de scurgere capătă o componentă tangențială la curba C și circulația pe o curbă închisă a vectorului viteză este diferită de zero. Prin urmare pentru cîmpul de viteze, în cazul unei curgeri cu vîrtejuri, calculul circulației conduce la rezultatul $\mathcal{E} \neq 0$.

Ținînd seama de considerațiile făcute mai sus, se poate trece la semnificația fizică a *rotorului*, mărime care servește pentru caracterizarea cantitativă a „densității vîrtejurilor". Asupra definirii acestei mărimi a se vedea și Anexa 4.

Conform teoremei lui Stokes, circulația se scrie

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_C E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iint \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Prin definiție rotorul cîmpului $\vec{E}$ este

$$\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{15.5}$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$ sînt versorii axelor de coordonate, despre care se vorbește de asemenea în Anexa 4.

Cu ajutorul relației (15.5), relația care exprimă circulația totală a cîmpului $\vec{E}$ (teorema lui Stokes) se poate scrie

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint \operatorname{rot}\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{15.6}$$

unde $\mathrm{d}\vec{A}$ este elementul de arie al suprafeței mărginită de curba C. Din relația (15.5) se constată că rotorul unui cîmp este o funcție de punct. Pe baza relației (15.6) se poate da o interpretare mai intuitivă și anume, *rotorul „mediu" al unui cîmp vectorial reprezintă raportul dintre circulație și aria închisă de curba pe care se calculează circulația.*

Rotorul este un vector normal la suprafața ce se sprijină pe curba C; sensul său se stabilește după regula burghiului drept, asociind sensul de rotație al burghiului sensului liniilor de cîmp, iar sensul de înaintare al burghiului sensului vectorului care reprezintă rotorul.

Analizînd relația (15.6) se poate ajunge la semnificația fizică a rotorului. La discutarea acestei relații s-a spus că rotorul mediu reprezintă raportul dintre circulație și aria închisă de curba C; cu alte cuvinte, *rotorul ar fi circulația unității de arie.* Cu cît circulația este mai mare, ceea ce are loc pentru un cîmp mai intens (linii de cîmp mai dese), cu atît unitatea de arie a suprafeței mărginită de curba C are un rotor mai mare. Este ca și cum se înlocuiesc liniile de cîmp închise cu „vîrtejuri elementare" ca în figura 15.7. Aceasta înseamnă că unei circulații mari îi corespunde o densitate de suprafață a vîrtejurilor elementare mai mare decît în cazul unei circulații mai mici.

Un cîmp nu are vîrtejuri dacă circulația este nulă, sau, cu alte cuvinte, dacă rotorul său este nul. Din punct de vedere analitic, aceasta se reduce, conform relației (15.5), printr-o anumită dependență a componentelor E_x, E_y și E_z de x, y și z. De exemplu, rotorul unui cîmp plan ($E_z = 0$), este nul dacă

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

15.3. Ecuațiile lui Maxwell

În electromagnetism ecuațiile lui Maxwell ocupă un loc central. De fapt, ele reprezintă o anumită formă de scriere a unora din legile electromagnetismului și anume a acelora care exprimă cîmpul electric și cîmpul magnetic. Pe cînd expresiile date la legile lui Gauss, ale lui Ampère și Faraday, în capitolul anterior se numesc *ecuațiile integrale* ale legilor respective, relațiile lui Maxwell se numesc *ecuațiile locale* ale acelorași legi, deoarece ele exprimă legile pentru regiuni din spațiu foarte mici, folosind pentru aceasta noțiunile de divergență și rotor.

Legile care exprimă cîmpul electric — Gauss și Faraday — precum și acelea care exprimă cîmpul magnetic — Gauss și Ampère — au forma matematică stabilită în capitolul anterior.

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \oiint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + I'$$

Se presupune că, în general, sarcina Q prezintă o distribuție spațială, care poate fi caracterizată prin densitatea de volum a sarcinii electrice, ρ. Sarcina electrică Q se poate scrie în acest caz

$$Q = \iiint \rho \cdot \mathrm{d}v \tag{15.7}$$

Cu ajutorul relației (15.7) și al teoremei Green-Ostrogradski, legea lui Gauss pentru cîmpul electric devine

$$\iiint \operatorname{div} \vec{E} \cdot \mathrm{d}v = \iiint \rho \cdot \mathrm{d}v$$

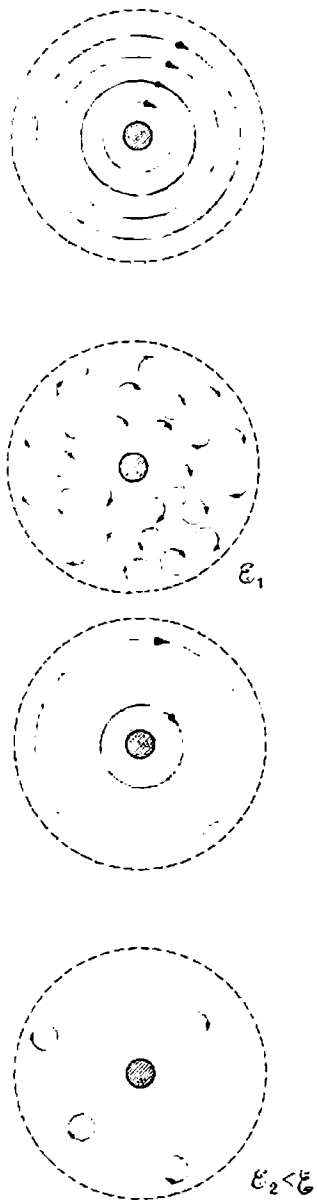


Fig. 15.7. Cîmpul electric de inducție cu t.e.m. $\mathcal{E}_1$ are liniile de cîmp mai dese și deci o densitate a vîrtejurilor elementare mai mare. La un cîmp electric de inducție cu t.e.m. $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$ liniile de cîmp sînt mai rare și deci densitatea vîrtejurilor elementare este mai mică.

Întrucît ambii membri se referă la acelaşi volum elementar, această ecuaţie integrală se reduce la următoarea ecuaţie locală care este valabilă pentru orice volum

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{15.8}$$

Cu ajutorul teoremei lui Stokes şi scriind fluxul magnetic φ ca integrala cîmpului $\vec{H}$ prin suprafaţa mărginită de curba pe care se calculează t.e.m. $\mathcal{E}$, se obţine legea lui Faraday sub forma

$$\iint \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Ambele integrale de suprafaţă se referă la aceeaşi arie elementară, încît ecuaţia integrală de mai sus conduce la ecuaţia locală

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{15.9}$$

Aplicînd teorema lui Green-Ostrogradski legii lui Gauss pentru cîmpul magnetic se obţine

$$\iiint \operatorname{div} \vec{H} \cdot \mathrm{d}v = 0$$

ceea ce înseamnă că pentru orice volum

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{15.10}$$

Această ecuaţie locală a cîmpului magnetic se completează cu aceea care rezultă din legea lui Ampère. Aplicînd teorema lui Stokes şi scriind curentul de conducţie I şi, respectiv, de deplasare în vid I', sub forma integralei de suprafaţă a densităţii de curent i, respectiv i', prin aria mărginită de curba C pe care se calculează t.m.m. $\mathcal{H}$, legea lui Ampère se va scrie

$$\iint \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iint \vec{i} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iint \vec{i}' \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$\vec{i}$ este densitatea de arie a curentului electric datorit deplasării electronilor într-un conductor, iar i' este densitatea de arie a curentului de deplasare în vid. Ecuaţia locală a legii lui Ampère ia forma

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} + \vec{i}'$$

sau

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{15.11}$$

unde s-a folosit relația (14.21) a curentului de deplasare în vid.

Relațiile (15.8), (15.9), (15.10) și (15.11) sînt ecuațiile locale ale lui Maxwell și exprimă proprietățile cîmpului electric și ale cîmpului magnetic. Prin urmare cîmpul electric produs de sarcini electrice are divergența diferită de zero, iar cîmpul electric de inducție are rotorul diferit de zero. Cu alte cuvinte, un cîmp electric de forma cea mai generală poate avea atît divergență cît și rotor. Cîmpul magnetic H diferă față de cîmpul electric E, deoarece cîmpul magnetic are numai rotor, divergența cîmpului magnetic fiind totdeauna egală cu zero.

În vid și în absența conductorilor electrici curentul de conducție este zero, $i = 0$ și deci ecuațiile locale formează sistemul

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{15.12}$$

Din relațiile lui Maxwell apare evidentă interdependența între cîmpul electric și cel magnetic. Ecuația locală a legii lui Ampère arată că variația în timp a cîmpului electric $\vec{E}$ produce un cîmp magnetic $\vec{H}$. Dacă acest cîmp magnetic este variabil în timp, adică dacă $\partial \vec{H}/\partial t \neq 0$, se produce un cîmp electric $\vec{E}$ conform legii lui Faraday. Se pune problema, în ce condiții cele două cîmpuri, $\vec{E}$ și $\vec{H}$, produse așa cum s-a arătat, ar fi, în continuare, variabile în timp. Această „înlănțuire" a cîmpului electric variabil în timp cu cîmpul magnetic variabil în timp, poate avea loc, de exemplu, dacă variația în timp a cîmpului electric inițial are o formă sinusoidală sau cosinusoidală; această situație se întîlnește la cîmpul electric dintre armăturile unui condensator dintr-un circuit oscilant. Pentru funcțiile trigonometrice sinus sau cosinus, derivatele de orice ordin sînt diferite de zero. Ca urmare, un cîmp electric de forma

$$\vec{E} = \vec{A} \cos(\omega t - \varphi)$$

produce un cîmp magnetic, cu rotorul diferit de zero. Variația sinusoidală în timp a acestui cîmp magnetic produce un cîmp electric al cărui rotor este diferit de zero. În expresia acestui cîmp electric apare cosinusul, ca în relația scrisă mai sus și deci în timp cîmpul electric de forma menționată produce un cîmp magnetic variabil în timp ș.a.m.d.

Această „înlănțuire" în timp a unui cîmp magnetic rotațional cu un cîmp electric rotațional este ceea ce se numește *cîmpul electromagnetic*. Cu alte cuvinte, consecința interdependenței exprimată de relațiile lui Maxwell este formarea cîmpului electromagnetic, ale cărui proprietăți vor fi analizate în paragrafele următoare.

15.4. Propagarea cîmpului electromagnetic

Analiza consecinţelor ecuaţiilor lui Maxwell se poate face pentru diferite situaţii dar una este mai importantă: spaţiul vid şi în care lipsesc sarcinile electrice. Aceasta este situaţia caracteristică spaţiului intragalactic sau a celui extragalactic şi oferă găsirea celei mai întîlnite forme de propagare a cîmpului electromagnetic. Propagarea cîmpului electromagnetic în atmosfera planetei noastre este asemănătoare cu cea care va fi găsită pentru spaţiul intragalactic sau cel extragalactic, cu excepţia păturilor ionosferice ale atmosferei, care conţin acumulări de sarcini electrice şi unde densitatea de volum a sarcinii electrice este diferită de zero.

În vidul lipsit de sarcini electrice, unde deci $\rho = 0$, nu există nici curent de conducţie, $\vec{i} = 0$. Ecuaţiile lui Maxwell în aceste condiţii au forma

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

În această situaţie identitatea vectorială, dată de relaţia (74) din Anexa 4,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} \tag{15.13}$$

se simplifică la forma

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} \tag{15.14}$$

respectiv

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\Delta \vec{H} \tag{15.15}$$

unde $\Delta \vec{E}$ şi $\Delta \vec{H}$ au forma dată în Anexa 4, relaţia (73),

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}$$

În continuare se folosesc ecuaţiile locale care dau rotorii cîmpurilor respective: rot $\vec{E}$ şi rot $\vec{H}$. Derivînd relaţia (15.9) în raport cu timpul se obţine

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

şi folosind derivata $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ din ultima relaţie (15.12) se poate scrie

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Notînd $v^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ și recurgînd la relația (15.15) rezultă

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{H} \tag{15.16}$$

Dacă se derivează în raport cu timpul ecuația care exprimă rot $\vec{H}$ și folosind derivata $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ din ecuația care dă rot $\vec{E}$ [v. relațiile (15.12)], cu ajutorul relației (15.14) se ajunge la

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{E} \tag{15.17}$$

Se constată că atît cîmpul electric cît și cel magnetic au aceeași formă și anume, forma ecuației unei unde care se propagă în spațiu [v. relația (13.20)]. Forma vectorială a relației (15.17) conține de fapt trei ecuații cu derivate parțiale, ecuații la care trebuie să satisfacă cele trei funcțiuni E_x, E_y și E_z de patru variabile x, y, z, t. Aceste ecuații sînt

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \Delta E_x = v^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \Delta E_y = v^2 \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = v^2 \Delta E_z = v^2 \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)$$

Studiul propagării cîmpului magnetic conduce la același rezultat ca și în cazul propagării cîmpului electric, deoarece ambele cîmpuri au aceeași formă a ecuației de propagare. Pentru studiul propagării se alege sistemul de coordonate astfel încît propagarea să aibă loc de-a lungul axei Ox. Această alegere a sistemului de coordonate nu reduce cu nimic din generalitatea modului de propagare a cîmpului electromagnetic, dar simplifică mult calculele. Pentru rezolvarea ecuației (15.17) se caută soluțiile ecuației și se constată că ecuația este satisfăcută pentru următoarea formă a cîmpului $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{A} \cos (\omega t - \varphi)$$

unde $\omega = 2\pi / T$ este pulsația sistemului oscilant care produce cîmpul electric oscilatoriu și $\vec{A}$ este vectorul amplitudine a cîmpului electric. A și ω sînt constante iar φ este funcție numai de x prin alegerea făcută asupra sistemului de coordonate (fig. 15.8)

$$\vec{E} = \vec{A} \cos (\omega t - \beta x) \tag{15.18}$$

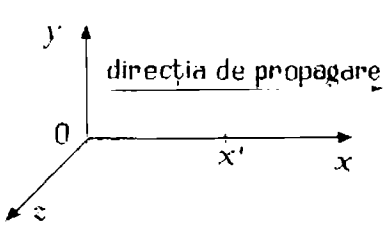


Fig. 15.8. Direcția de propagare a cîmpului electromagnetic se alege în lungul axei Ox.

Această ecuație este asemănătoare cu ecuația undei plane care se propagă în direcția x. Într-o undă plană cîmpul $\vec{E}$ depinde numai de x, el fiind constant în planul yOz; cu alte cuvinte relația (15.17) se poate pune sub forma

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \tag{15.19}$$

deoarece în acest caz două din derivatele de ordinul doi sînt nule

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0$$

Pentru calculul constantei β se efectuează derivatele

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{A}\omega \sin(\omega t - \beta x) \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{A}\beta \sin(\omega t - \beta x)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{A}\omega^2 \cos(\omega t - \beta x) \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\vec{A}\beta^2 \cos(\omega t - \beta x)$$

Expresiile acestor derivate se introduc în relația (15.19) și se obține

$$\omega^2 = v^2\beta^2; \qquad \beta = \frac{\omega}{v}$$

Introducînd expresia lui β în relația (15.18) se ajunge la forma

$$\vec{E} = \vec{A} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{15.20}$$

Din relația (15.20) reiese semnificația mărimii v. Valoarea cîmpului electric $\vec{E}$ la timpul t' într-un punct de coordonată x' (adică la distanța x' de planul yOz) (v. fig. 15.8) este $\vec{E} = \vec{A} \cos \omega \left(t' - \frac{x'}{v}\right)$ și este egală cu valoarea cîmpului $\vec{E}$ la $x = 0$ și la timpul anterior t_0, $\vec{E} = \vec{A} \cos \omega t_0$. Elongațiilor egale le corespunde faza egală, adică $t_0 = t' - x'/v$; rezultă că faza cîmpului electric a avut nevoie de timpul $t' - t_0 = x'/v$ ca să se propage de la $x = 0$ la x'. Prin urmare $v = x'/(t' - t_0)$ reprezintă viteza de propagare a fazei cîmpului electric. Conform notației făcută mai înainte $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Valorile componentelor cîmpului electric $\vec{E}$ decurg ca consecințe din celelalte două ecuații ale lui Maxwell. Astfel divergența cîmpului electric $\vec{E}$ egală cu zero

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

şi faptul că în unda plană cîmpul electric E nu depinde de y şi z, conduce la concluzia

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Aceasta înseamnă că E_x este constant în raport cu x, E_y este constant în raport cu y şi E_z este constant în raport cu z, adică aceste componente nu variază în raport cu coordonatele respective. Dar cîmpul electric, aşa cum arată relaţia (15.20) este funcţie de coordonata x şi deci derivata

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = A\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

trebuie să fie nulă pentru orice valoare a timpului t şi la orice valoare a coordonatei x. Ca urmare $E_x = 0$, ceea ce înseamnă că cîmpul electric nu are componentă pe axa Ox; cu alte cuvinte vectorul cîmp electric este perpendicular pe axa Ox, fiind situat în planul yOz. Aceasta înseamnă că vectorul $\vec{E}$ se propagă prin unde transversale. Concluzia aceasta este în concordanţă cu afirmaţia făcută mai înainte că E_y şi E_z nu variază în raport cu coordonatele respective, y şi z, ceea ce este adevărat pentru o undă plană: vectorul unei asemenea unde este constant în planul de undă.

În continuare se roteşte sistemul de coordonate ales astfel încît axa Oy să coincidă cu direcţia cîmpului electric $\vec{E}$. Ca urmare componentele cîmpului electric sînt

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \\ E_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15.21)$$

Forma cîmpului electric fiind stabilită, se poate trece la determinarea formei cîmpului magnetic, adică la găsirea componentelor cîmpului magnetic. Ecuaţia locală corespunzătoare legii lui Faraday, din relaţiile (15.12), este

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{E}$$

Folosind relaţia (15.5) care dă componentele rotorului cîmpului E şi expresiile componentelor cîmpului electric din (15.21) se obţine

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -A\frac{\omega}{\mu_0 v}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Din primele două ecuații rezultă că componentele cîmpului magnetic pe axele x și y, H_x și H_y, sînt constante în raport cu timpul. Deoarece cîmpul magnetic este o funcție periodică în timp, valoarea constantă a celor două componente este tocmai zero. Din a treia ecuație se poate deduce componenta H_z

$$H_z = \int \frac{\partial H_z}{\partial t}\, dt = A \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

deoarece $\dfrac{1}{\mu_0 v} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$.

Iată deci componentele cîmpului magnetic

$$\left.\begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= 0 \\ H_z &= A \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \end{aligned}\right\} \qquad (15.22)$$

Așa cum rezultă din aceste relații, cîmpul $\vec{H}$ este situat pe axa Oz, deci perpendicular pe cîmpul $\vec{E}$ (figura 15.9). Viteza de propagare a fazei, pentru cîmpul $\vec{H}$, este egală cu aceea a cîmpului $\vec{E}$. La un x dat cei doi vectori sînt în fază, adică au aceeași fază după cum reiese din relațiile (15.21) și (15.22). În figura 15.9 este arătată propagarea vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$ la un timp t. Valorile elongațiilor din figura 15.9 se obțin din relațiile (15.21) și (15.22) dacă se dă o anumită valoare timpului. De exemplu, pentru $t = 0$, se obțin elongațiile

$$\left.\begin{aligned} E_y &= A \cos \frac{\omega x}{v} \\ H_z &= A \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos \frac{\omega x}{v} \end{aligned}\right\} \qquad (15.23)$$

deoarece $\cos - \alpha = \cos \alpha$. Cele două expresii reprezintă două cosinusoide care taie axa Ox în aceleași puncte și sînt maxime la același timp. Cele două cosinusoide se deplasează în timp spre x-ii pozitivi. Ansamblul celor două cosinusoide formează *unda electromagnetică*; acesta este modul în care se propagă cîmpul electromagnetic. La un moment dat, cum se vede și în figură, cei doi vectori $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sînt în fază, adică fazele lor, x'/v și x''/v, diferă cu 2π. Lungimea $x'' - x'$ corespunzătoare în spațiu unei perioade a cosinusoidelor se numește lungimea de undă

$$\frac{\omega x''}{v} = \frac{\omega x'}{v} + 2\pi$$

$$x'' - x' = 2\pi \frac{v}{\omega} = v \cdot T$$

și deci

$$\lambda \equiv x'' - x' = v \cdot T = \frac{v}{\nu}$$

deoarece frecvenţa ν este $\nu = 1/T$. Lungimea de undă se măsoară în metri, iar frecvenţa în hertzi.

Notă:

Raportul amplitudinilor cîmpurilor magnetic şi electric în vid este

$$\frac{H_z}{E_y} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

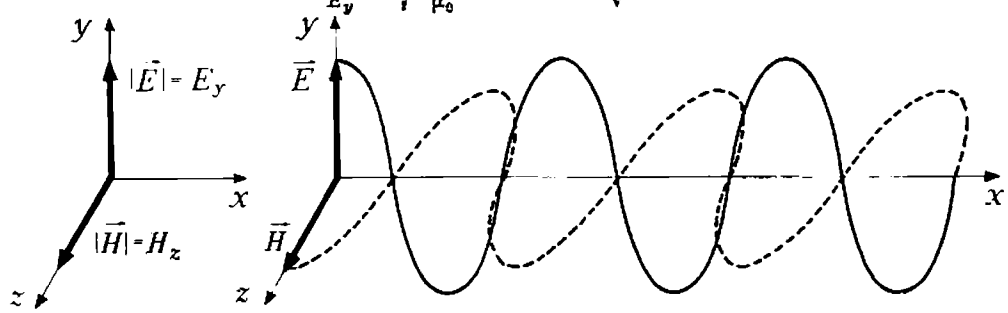


Fig. 15.9. Orientarea vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ şi valorile lor la un timp t în propagarea cîmpului electromagnetic.

Această valoare se obţine cu ajutorul valorilor celor două constante universale şi cu ajutorul relaţiilor între unităţi

$$\left\langle \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right\rangle = \sqrt{\frac{F}{m} \cdot \frac{m}{H}} = \sqrt{\frac{F}{H}} = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{V}^2}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

sau ceea ce este totuna

$$\left\langle \frac{H}{E} \right\rangle = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

15.5. Viteza de propagare

În paragraful precedent s-a stabilit că *faza* undelor electromagnetice se propagă în vid cu viteza

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Folosind valorile constantelor ε_0 şi μ_0 şi cu ajutorul relaţiilor între unităţi se obţine

$$v = 2{,}99793 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} \cong 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}} = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{F} \cdot \mathrm{H}}} = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{s}^2}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Prin urmare *viteza de fază* a undelor electromagnetice în vid este egală cu viteza limită c impusă de invarianța einsteiniană

$$v = c$$

Se precizează aici că această egalitate este adevărată numai pentru vid. În ceea ce privește viteza de fază, aceasta nu este legată de transportul substanței sau al energiei și de aceea nu i se poate impune viteza limită c. *Viteza limită c poate fi impusă numai vitezei de propagare a energiei electromagnetice.* Care este viteza de propagare a energiei electromagnetice? Pentru a răspunde la această întrebare se va analiza în detaliu propagarea undelor electromagnetice în spațiu.

Ecuația undei plane, așa numita undă armonică, reprezintă o perturbare în spațiu de la $-\infty$ la $+\infty$, care durează un timp infinit de lung. Așa cum s-a arătat în § 13.3, în natură nu există unde armonice, există numai „semnale"; un semnal este un *grup de unde* sau un *pachet de unde*, care are o întindere limitată în spațiu și o durată definită. După Fourier, un semnal se poate descompune într-un număr mare de unde care au frecvențe diferite. Prin suprapunerea mai multor unde armonice se obține un fenomen periodic sau neperiodic; fenomenul neperiodic astfel obținut se numește semnal. În propagarea semnalului poate să apară fenomenul de dispersie, caracterizat prin aceea că viteza de propagare a fazei, v, depinde de frecvența $\nu = \frac{1}{T}$ a undei sau, ceea ce este totuna, de lungimea de undă λ, cele două mărimi fiind legate între ele prin relația $\lambda = v/\nu$. Pentru aceasta se scrie ecuația undei sub forma

$$E = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x\nu}{v}\right) =$$

$$= A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{15.24}$$

și se presupun două unde armonice, E_1 și E_2, care au aceeași amplitudine A și lungimi de undă apropiate, λ și λ'. Cele două unde se propagă de-a lungul aceleiași direcții Ox, cu vitezele v și v' puțin diferite, și astfel încît $\lambda > \lambda'$ și $v > v'$. Lungimea de undă a celor două unde diferă atît din cauza frecvențelor diferite, cît și din cauza vitezelor de propagare a fazei care sînt diferite. Într-un mediu nedispersiv cele două unde ar avea lungimile de undă diferite numai datorită frecvențelor ν și ν' diferite.

Elongațiile punctelor de pe direcția Ox datorită celor două unde la momentul t sînt arătate în figura 15.10. Cînd ambele oscilații se propagă, elongațiile punctelor de pe direcția Ox sînt date de sumele algebrice ale elongațiilor datorite fiecărei oscilații în parte, cum se vede în josul figurii 15.10. Analitic elongația mișcării rezultante este

$$E = E_1 + E_2 = A \left[\cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos 2\pi \left(\nu' t - \frac{x}{\lambda'}\right)\right] =$$

$$= 2A \cos \pi \left[(\nu - \nu') t - \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) x \right] \cos \pi \left[(\nu + \nu') t - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) x \right] =$$

$$= 2A \cos \pi \left(\Delta\nu t - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} x \right) \cos \pi \left(2\nu t - \frac{\lambda' + \lambda}{\lambda\lambda'} x \right)$$

unde s-a notat $\nu - \nu' = \Delta\nu$ şi $\nu + \nu' \cong 2\nu$. Punînd $\lambda' - \lambda = -\Delta\lambda$, deoarece $\Delta\lambda = -\Delta\nu$ şi de asemenea $\lambda' + \lambda \cong 2\lambda$, iar $\lambda\lambda' \cong \lambda^2$, se obţine

$$E = 2A \cos \pi \left(\Delta\nu t + \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} x \right) \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \qquad (15.25)$$

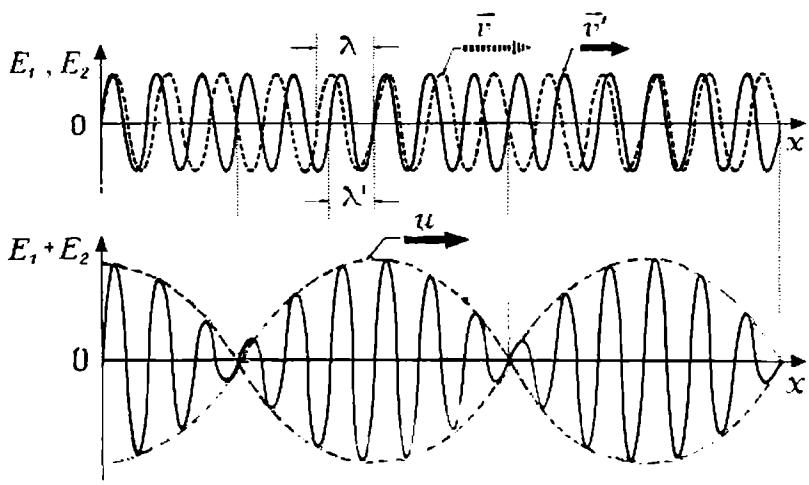


Fig. 15.10. Două unde electromagnetice cu lungimi de undă apropiate $\lambda > \lambda'$ se compun astfel încît elongaţia undei rezultante arată la un timp t ca în josul figurii. Unda cu lungime de undă λ se propagă cu viteza de fază $\vec{v}$, iar aceea de lungime de undă λ' se propagă cu viteza de fază $\vec{v}'$. Amplitudinea undei rezultante se propagă cu viteza de grup $\vec{u}$.

Prin urmare, în lungul axei Ox se propagă un fenomen periodic a cărei amplitudine variază între O şi $2A$. Ansamblul oscilaţiilor cuprinse între două puncte de amplitudine rezultantă nulă alcătuieşte un „grup de unde". Punctul de pe axa Ox în care amplitudinea rezultantă este maximă se deplasează în timp, în lungul direcţiei de propagare; cu alte cuvinte „grupul de unde" se deplasează de-a lungul axei Ox. Cauza acestei deplasări este diferenţa dintre vitezele de propagare ale fazelor undelor componente, care face ca la momente diferite să se însumeze amplitudinile componente în alte puncte ale direcţiei Ox. Se poate defini astfel o viteză de propagare a grupului de unde numită pe scurt *viteză de grup*, care se notează cu u. Raţionamentul făcut pentru suprapunerea a două unde armonice poate fi extins pentru suprapunerea mai multor unde armonice. În paragraful 13.3 s-a arătat că cu cît numărul de unde componente este mai mare, cu atît mai mult va rezulta un grup de unde mai bine definit, iar pentru o variaţie continuă a frecvenţelor undelor componente se obţine un semnal cu o durată bine determinată în timp. Consideraţiile făcute pentru suprapunerea a două unde armonice sînt adevărate şi pentru suprapunerea unui număr mai mare de unde armonice, astfel încît rezultatele obţinute aici se pot aplica şi în cazul general.

În cele ce urmează se va stabili relaţia între viteza de fază v şi viteza de grup u. Viteza de fază v, a cărei expresie se cunoaşte, se poate deduce într-un

mod mai general, care va fi util pentru calculul vitezei de grup. Pentru aceasta, se poate spune că faza undei are aceleaşi valori pentru anumite valori ale coordonatei x, adică se pune condiţia $\nu t - x/\lambda = \text{const.}$ pentru un x dat. În acest caz derivata dx/dt dă tocmai viteza de fază

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \nu\lambda$$

Analog, pentru a găsi viteza de deplasare a grupului, care este identică cu viteza de deplasare a unei anumite amplitudini, se alege o valoare constantă a amplitudinii, astfel ca

$$\Delta\nu \cdot t + \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} x = \text{const.}$$

Prin derivare se obţine

$$u \equiv \frac{dx}{dt} = -\lambda^2 \frac{\Delta\nu}{\Delta\lambda} \tag{15.26}$$

La limită, $u = -\lambda^2 \cdot d\nu/d\lambda$; se observă că cele două viteze, v şi u, au expresii diferite.

Viteza de grup se poate scrie în funcţie de viteza de fază v, ştiind că $\nu = v/\lambda$

$$u = -\lambda^2 \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{v}{\lambda}\right) = -\lambda^2 \frac{\lambda \frac{dv}{d\lambda} - v}{\lambda^2} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \tag{15.27}$$

Într-un mediu nedispersiv, pentru care $dv/d\lambda = 0$, viteza de grup este egală cu viteza de fază

$$u = v$$

Într-o undă nu există transport de substanţă ci *transport de energie*. Un semnal sau un grup de unde este echivalent cu transportul unei anumite cantităţi de energie şi deci viteza de deplasare a grupului de unde reprezintă viteza de propagare a energiei. Rezultă de aici că viteza limită c trebuie impusă vitezei de grup.

În vid, care este un mediu nedispersiv,

$$u = v = c$$

viteza de grup este egală cu viteza de fază şi ambele sînt egale cu viteza limită c, pe care însă nu o pot depăşi.

Într-un mediu dispersiv, de exemplu, în cristale, $dv/d\lambda > 0$, ceea ce conduce relaţia (15.27) la $u < v$; conform postulatului lui Einstein $u < c$. În unele cristale viteza de fază poate fi mai mare decît viteza de grup şi în acelaşi timp mai mare decît viteza limită c. Astfel, în experienţele cu laseri s-a găsit $v = 2\,700\,000$ km/s; se precizează că acest rezultat nu infirmă postulatul lui Einstein.

15.6. Energia cîmpului electromagnetic

Energia cîmpului electromagnetic se compune din energia cîmpului electric şi din energia cîmpului magnetic. Calculul acestor energii se poate face în cazuri simple, de exemplu, pentru un condensator în cazul cîmpului electric şi pentru un solenoid în cazul cîmpului magnetic; rezultatele obţinute pot fi generalizate pentru orice situaţie unde există un cîmp electric sau un cîmp magnetic.

Fie un condensator cu armăturile plan paralele de arie A, situate una de alta la distanţa d. Dacă mediul dintre armături nu conţine un dielectric, capacitatea C a condensatorului este

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

unde ε_0 este permitivitatea vidului. Dacă tensiunea electrică U dintre armăturile condensatorului este dată de $U = E \cdot d$, unde E este cîmpul electric între armături, energia condensatorului este

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \cdot d \cdot E^2$$

Mărimea $A \cdot d = V$ reprezintă volumul spaţiului delimitat de armături, volum în care există cîmpul electric E.

Densitatea de energie w, adică raportul dintre energia şi volumul în care există cîmpul electric, are expresia

$$w \equiv \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tag{15.28}$$

Aceasta este densitatea de energie în orice punct din spaţiul în care există cîmpul electric E.

Se consideră un solenoid cu N spire, străbătut de un curent variabil în timp a cărui valoare instantanee este i. La trecerea curentului prin spirele sale apare o t.e.m. indusă $\mathcal{E}$, dată de variaţia fluxului magnetic $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, conform legii lui Faraday, în valoare absolută,

$$\mathcal{E} = N\mu_0 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = NA\mu_0 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \tag{15.29}$$

unde A este aria unei spire a solenoidului, μ_0 este permeabilitatea vidului, iar H este cîmpul magnetic produs de curentul care străbate spirele solenoidului. Valoarea curentului i este dată de legea lui Ampère

$$i = \frac{Hl}{N}$$

unde l este lungimea solenoidului. În această expresie s-a presupus că cîmpul magnetic este concentrat în interiorul solenoidului, adică în volumul $V = A \cdot l$ şi că în exteriorul său cîmpul magnetic este egal cu zero.

Puterea electrică consumată de solenoid şi care produce cîmpul magnetic în interiorul său este produsul dintre t.e.m. $\mathcal{E}$ şi curentul i. Această putere se scrie ca raportul dintre variaţia elementară a energiei dW şi timpul elementar dt, deoarece energia variază în timp din cauza mărimilor variabile $\mathcal{E}$ şi i. Cu alte cuvinte se poate scrie egalitatea

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E} \cdot i$$

Cu ajutorul expresiei (15.29) această relaţie devine

$$\frac{dW}{dt} = NA\mu_0 \frac{dH}{dt} \frac{H \cdot l}{N} = \mu_0 A \cdot l \cdot H \frac{dH}{dt}$$

sau, punînd $A \cdot l = V$ şi simplificînd cu dt, se obţine

$$dW = \mu_0 V H \, dH$$

Integrînd energia de la 0 la W şi cîmpul magnetic de la 0 la H se ajunge la expresia

$$W = \mu_0 V \frac{H^2}{2}$$

Densitatea de energie w în volumul în care se găseşte cîmpul magnetic este

$$w \equiv \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \tag{15.30}$$

Această energie se găseşte în orice punct din spaţiul în care există cîmpul magnetic H.

Relaţiile (15.28) şi (15.30) se generalizează pentru orice punct din spaţiu în care există un cîmp electric, respectiv un cîmp magnetic. În punctul în care se găseşte un cîmp electromagnetic apare o densitate de energie totală, datorită atît cîmpului electric, cît şi cîmpului magnetic

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \tag{15.31}$$

Intensitatea de energie electromagnetică, I, reprezintă cantitatea de energie care trece în unitatea de timp prin unitatea de arie perpendiculară pe direcţia de propagare a energiei. Conform relaţiei (13.22) intensitatea de energie are expresia

$$I = w \cdot c$$

unde w este densitatea de energie iar c este viteza de propagare a energiei; în cazul de faţă, în vid, viteza de propagare a energiei este tocmai viteza limită c, conform consideraţiilor făcute în § 15.5. Cu ajutorul relaţiei (15.31) şi punînd $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, intensitatea de energie electromagnetică se scrie

$$I = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^2 \right) \tag{15.32}$$

Din relaţiile (15.23) care exprimă cele două cîmpuri, electric şi magnetic, rezultă legătura dintre ele

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E$$

Cu această expresie relaţia (15.32) devine

$$I = \frac{1}{2}(H \cdot E + E \cdot H) = E \cdot H$$

Prin urmare intensitatea de energie electromagnetică este egală cu produsul dintre intensitatea cîmpului electric şi aceea a cîmpului magnetic. Această mărime caracterizează transportul energiei electromagnetice în cîmpul electromagnetic, sensul transportului fiind în sensul de propagare al cîmpului.

Pentru descrierea transportului de energie în cîmpul electromagnetic se foloseşte *vectorul lui Poynting*, notat de obicei cu $\vec{S}$, care are direcţia şi sensul vitezei de propagare a undei electromagnetice şi modulul egal cu intensitatea de energie electromagnetică

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad (15.33)$$

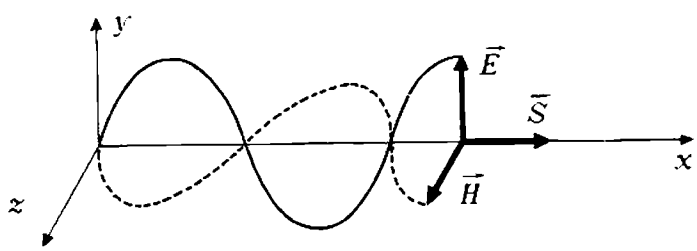


Fig. 15.11. Vectorul Poynting $\vec{S}$ formează un triedru drept cu vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, în propagarea cîmpului electromagnetic.

Acest produs vectorial arată că vectorii $\vec{S}$, $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ formează un triedru drept, adică propagarea energiei în cîmpul electromagnetic se face aşa cum se arată în figura 15.11.

Modulul vectorului lui Poynting, ca şi intensitatea de energie electromagnetică se măsoară în W/m^2.

ANEXA 1

Calculul integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Pentru calculul acestei integrale se foloseşte identitatea

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx dy$$

În această integrală dublă, extinsă la întreg planul xy, se introduc coordonatele polare

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

Cu ajutorul acestor relaţii, expresia I^2 devine

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr$$

Notînd $r^2 = t$, se obţine $2\,r\,dr = dt$ şi deci

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{2} = \pi \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \pi \left| e^{-t} \right|_0^{\infty} = \pi$$

În consecinţă

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

ANEXA 2

Constante fizice fundamentale

			Valori aproximative cu 2% pentru calcule tehnice	
Constanta cercului	π	3,142	3,1	—
Constanta luminii	c	$2{,}998 \cdot 10^8$	$3{,}0 \cdot 10^8$	$m.s^{-1}$
Constanta gravitaţiei	γ	$6{,}670 \cdot 10^{-11}$	$6{,}7 \cdot 10^{-11}$	$N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Constanta gazelor	R	$8{,}314 \cdot 10^3$	$8{,}3 \cdot 10^3$	$J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$
Constanta lui Avogadro	$\mathfrak{N}$	$6{,}023 \cdot 10^{26}$	$6{,}0 \cdot 10^{26}$	$kmol^{-1}$
Constanta lui Boltzman	k	$1{,}381 \cdot 10^{-23}$	$1{,}4 \cdot 10^{-23}$	$J \cdot K^{-1}$
Constanta lui Planck	h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$	$6{,}6 \cdot 10^{-34}$	$J \cdot s$

Sarcina electrică elementară	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	C
Masa de repaus a electronului	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	$9{,}0 \cdot 10^{-31}$	kg
Masa de repaus a protonului	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$	$1{,}7 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa de repaus a neutronului	m_n	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$		kg
Unitatea u	u	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$		kg
Permitivitatea vidului	ε_0	$8{,}855 \cdot 10^{-12}$	$9{,}0 \cdot 10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}$
Permeabilitatea vidului	μ_0	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$H \cdot m^{-1}$
Presiunea atmosferică standard	p_a	$1{,}013 \cdot 10^5$	$1{,}0 \cdot 10^5$	$N \cdot m^{-2}$
Accelerația pămîntească standard	g	9,807	10	$m \cdot s^{-2}$

ANEXA 3

Sistemul Internațional

Sistemul Internațional de unități de măsurare, denumit pe scurt SI, a fost stabilit de către cea de a 11-a Conferință generală de Măsuri și Greutăți din anul 1960 și a fost adoptat de țara noastră printr-o lege: Hotărîrea Consiliului de Miniștri nr. 550 din anul 1961.

Sistemul Internațional se bazează pe alegerea a șase mărimi fundamentale și deci a șase unități fundamentale pentru măsurarea mărimilor fundamentale. Mărimile fundamentale sînt: lungimea, timpul, masa, curentul electric, temperatura și intensitatea luminoasă.

UNITATEA DE LUNGIME

Unitatea de lungime metrul, luată inițial ca lungimea unei bare etalon, este definită astăzi cu ajutorul lungimii de undă a unei anumite radiații electromagnetice, luminoase, monocromatice, emisă de un anumit izotop stabil al unui element chimic într-o stare foarte pură.

Prin interferometrie se pot obține franje de interferență care permit stabilirea unei relații matematice între lungimea de undă și diferența de drum între două radiații coerente. Cu cît radiația folosită este mai monocromatică, cu atît diferența de drum poate fi mai mare. Se poate ajunge astfel la diferențe de drum de un metru, ceea ce permite compararea acestei lungimi cu radiația etalon: linia portocalie din spectrul izotopului stabil al kriptonului 86.

Metrul este lungimea egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă, în vid, ale radiației care corespunde tranziției atomului de kripton 86 între nivelele sale $2\,p_{10}$ *și* $5d_5$.

Folosirea unei lungimi de undă ca etalon primar pentru unitatea de lungime presupune un aranjament experimental foarte sofisticat al cărui studiu depășește nivelul de cunoștințe al acestei cărți.

UNITATEA DE TIMP

Unitatea de timp, secunda, a fost definită inițial în funcție de perioada unui fenomen periodic natural: rotația aparentă a Soarelui în jurul Pămîntului.

De cîțiva ani se folosește o definiție nouă a secundei, bazată pe perioada unei radiații corespunzătoare tranziției între două nivele energetice ale unui atom. Utilizîndu-se o radiație de frecvență relativ mică și anume din domeniul radiațiilor hertziene, se pot obține cu ajutorul fenomenului bătăilor, în montaje electronice, semnale distanțate în timp cu durate de fracțiuni de secundă sau chiar de o secundă. Pentru aceasta se face apel la radiația emisă la trecerea între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133.

Cesiul 133 este singurul izotop stabil al cesiului. Radiația folosită are o frecvență de aproximativ $9{,}2 \cdot 10^9$ Hz ceea ce corespunde unei lungimi de undă de aproximativ 30 milimetri.

Secunda este durata a 9 192 631 770 perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133.

UNITATEA DE MASĂ

Unitatea de masă, kilogramul, este masa unui corp etalon adoptat convențional, denumit „kilogram internațional".

Kilogramul este masa „kilogramului internațional" prototip de platină iridiată, adoptat în 1889 de Conferința generală de măsuri și greutăți și păstrat la Biroul internațional de măsuri și greutăți de la Sèvres-Franța.

Nu s-a pus încă problema găsirii unui etalon natural pentru unitatea de masă, cum ar fi, de exemplu, masa unei anumite molecule, deoarece compararea „kilogramului internațional" cu masa unei molecule nu se poate face cu gradul de precizie cerut de metrologie.

UNITATEA DE INTENSITATE A CURENTULUI ELECTRIC

Unitatea de intensitate a curentului electric, amperul, este definit cu ajutorul forței care se exercită între doi curenți situați la o anumită distanță unul de altul și plasați în vid. Pentru doi curenți de intensități I' și I'' paraleli de lungime l așezați la distanța d unul de celălalt în vid, forța are expresia

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{d} I' I''$$

unde μ_0 este permeabilitatea vidului. Dacă $d = 1$ m, $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$ și $I' = I'' = 1$A,

forța pe unitatea de lungime are valoarea

$$\frac{F}{l} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Amperul este intensitatea unui curent electric constant, care menținut în două conductoare paralele, rectilinii, de lungime infinită și de secțiune circulară neglijabilă, așezate în vid la o distanță de un metru unul de altul, produce între aceste două conductoare o forță egală cu $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe metru de lungime.

UNITATEA DE TEMPERATURĂ

Unitatea de temperatură, kelvinul, este definit ca a suta parte din intervalul de temperatură cuprins între punctul de topire a gheții și punctul de fierbere a apei la presiunea atmosferică normală.

Pentru măsurarea temperaturii se folosesc două scări de temperatură: scara de temperatură Celsius și scara de temperatură Kelvin, ambele sînt scări termodinamice. Scara Kelvin este considerată ca scara de temperatură fundamentală. În ambele scări, diferența între punctul de topire a gheții și punctul de fierbere a apei este egală cu 100 grade; cu alte cuvinte, kelvinul este egal cu gradul Celsius, sau orice interval de temperatură exprimat în kelvini va avea aceeași valoare numerică dacă este exprimat în grade Celsius. Temperatura zero grade Celsius corespunde temperaturii 273,15 kelvini.

Din punct de vedere metrologic, punctul triplu al apei, definit ca temperatura de echilibru între gheață, apă și vaporii de apă, constituie un reper termometric determinabil cu o precizie mult mai ridicată decît punctul de topire a gheții.

Kelvinul este unitatea de măsurare în scara termodinamică în care pentru punctul triplu al apei s-a atribuit valoarea numerică de 273,16.

În consecință punctul zero al scării termodinamice Celsius trebuie definit ca fiind temperatura cu 0,0100 kelvini mai mică decît aceea a punctului triplu al apei pure.

UNITATEA DE INTENSITATE LUMINOASĂ

Unitatea de intensitate luminoasă, candela, este intensitatea luminoasă a unui anumit corp incandescent, convențional ales, la temperatura sa de topire.

Din punct de vedere metrologic, candela se realizează mai ușor cu ajutorul unei anumite suprafețe dintr-un corp adus la incandescență care radiază integral, așa-numitul corp negru. În practică se realizează un astfel de radiator integral cu ajutorul platinei la temperatura sa de topire, la presiunea atmosferică normală, încît realizarea în concret a etalonului candelei este următoarea.

Candela este intensitatea luminoasă, emisă în direcția normală, la temperatura de solidificare a platinei și presiunea atmosferică normală, de către suprafața unui radiator integral (corp negru) cu aria de 1/600 000 metri pătrați.

UNITĂȚILE SUPLIMENTARE ALE SISTEMULUI SI

Pe lîngă cele șase unități fundamentale, sistemul SI are la bază încă două unități suplimentare și anume *radianul* pentru unghiul plan și *steradianul* pentru unghiul solid.

Radianul este unghiul plan cu vîrful în centrul unui cerc, care delimitează pe circumferința cercului un arc a cărui lungime este egală cu raza cercului.

Steradianul este unghiul solid cu vîrful în centrul unei sfere, care delimitează pe suprafața sferei o arie egală cu aria unui pătrat a cărui latură este egală cu raza sferei.

Radianul are simbolul rad, iar steradianul are simbolul sr.

UNITĂȚILE TOLERATE PENTRU MĂRIMILE FUNDAMENTALE

În afara unităților fundamentale, metrul, secunda și kilogramul, pentru mărimile fundamentale respective (lungimea, timpul și masa) se mai folosesc cîteva unități tolerate impuse de anumite domenii ale tehnicii.

De exemplu, p e n t r u l u n g i m e:

— unități de lungime tipografice: punctul tipografic, linia, cicero, cadrantul

— unități de lungime astronomice: parsecul, anul-lumină;

— unități de lungime navale: mila marină,

— unități de lungime speciale: angstromul, unitatea X,

p e n t r u m a s ă:

— caratul metric, unitatea gama, unitățile biologice;

p e n t r u t i m p:

— ora, ziua, anul, secolul, mileniul.

În ceea ce privește unitățile sistemului CGS, acestea se folosesc numai în capitolele speciale ale fizicii atomice și nucleare. În publicații și manuale nu sînt recomandate.

UNITĂȚILE TOLERATE PENTRU MĂRIMILE DERIVATE

Cu ajutorul unităților fundamentale ale sistemului SI se stabilesc unitățile derivate, care aparțin de asemenea sistemului SI. (v. subcoperta 2, 3, 4)

În afara acestor unități derivate, se folosesc încă, conform convențiilor internaționale, o serie de unități tolerate, de exemplu:

pentru viteza unghiulară

— rotația pe secundă 1 rot/s = 2π rad/s

pentru presiune

— barul 1 bar = 10^5 N/m^2

— torrul 1 Torr = $1{,}333 \cdot 10^2$ N/m^2

— atmosfera 1 atm = $1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m^2

— milimetrul coloană apă 1 mm H_2O = 9,80665 N/m^2

pentru energie:

— wattora 1 Wh = 3600 J

— kilowattora 1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J

pentru cantitatea de electricitate

— amperora 1 Ah = 3 600 C

Există în uz, în diferitele ramuri ale tehnicii, un număr de unități tolerate, a căror întrebuințare va fi interzisă după 1 ianuarie 1976, conform normelor internaționale și naționale. Aceste unități tolerate temporar sînt următoarele:

pentru forță: kilogramul forță și tona forță

pentru presiune: kilogramul forță pe metru pătrat

pentru viscozitatea dinamică: poise-ul

pentru viscozitatea cinematică: stokes-ul

pentru lucrul mecanic și energie: kilogramul forță-metru

pentru putere: kilogramul forță-metru pe secundă și calul putere

Multiplii și submultiplii zecimali

Denumire	Simbolul	Factorul de multiplicare
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Elemente de algebră și analiză vectorială*

1. Elemente de algebră vectorială

1.1. Descompunerea unui vector după trei axe perpendiculare.

Considerăm vectorul $\vec{a}$ orientat în spațiu având punctul de aplicație în originea axelor de coordonate carteziene. Proiecțiile vectorului pe axele x, y, z sînt respectiv a_x, a_y, a_z, iar versorii celor trei axe sînt $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Amintim că versorul este un vector cu modulul egal cu unitatea. Deci: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

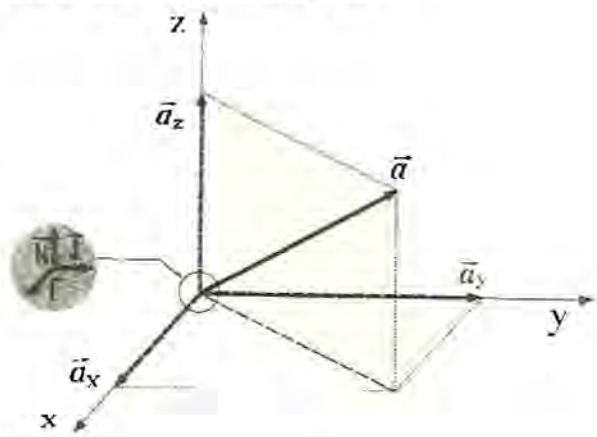


Fig. 1. Descompunerea unui vector după un sistem de axe de coordonate carteziene.

Conform descompunerii făcute în fig. 1 se poate scrie

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (1)$$

În conformitate cu descompunerea din relația (1) rezultă că orice ecuație vectorială va fi echivalentă cu un sistem de trei ecuații scalare. De exemplu, fie următorii trei vectori:

$$\vec{V}_1 = 2x\vec{i} + (x + 4y)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = y\vec{i} + (x + z)\vec{j} + x\vec{k}$$
$$\vec{V}_3 = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

Considerăm că ecuația vectorială are forma

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_3$$

Atunci rezultă

$$(2x + y)\vec{i} + (2x + 4y + z)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

Aceasta se transformă în sistemul

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + 4y + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

* Redactat de Mihail Tănăsescu

1.2. Produsul scalar a doi vectori

Produsul scalar a doi vectori este numărul care rezultă din înmulțirea modulelor celor doi vectori și a cosinusului unghiului format de ele. Fie doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ cu modulele a, b făcînd între ele unghiul θ. Atunci produsul scalar al celor doi vectori notat $\vec{a} \cdot \vec{b}$ este dat de relația:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a \cdot b \cdot \cos \theta \tag{2}$$

Fig. 2. Produsul scalar a doi vectori.

Conform relației (2) se observă că vom avea satisfăcute următoarele egalități

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 & \vec{i} \cdot \vec{j} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ pot fi descompuși după un sistem de axe de coordonate carteziene în conformitate cu relația (1)

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Atunci efectuînd produsul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și ținînd seama de relațiile (3) rezultă

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{5}$$

1.3. Produsul vectorial a doi vectori

Se numește produs vectorial a doi vectori, vectorul cu modulul egal cu produsul dintre modulele celor doi vectori și sinusul unghiului dintre ele, avînd direcția perpendiculară pe planul format de cei doi vectori, iar sensul fiind dat de regula burghiului drept prin rotirea primului vector peste celălalt pe drumul cel mai scurt.

Fie doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ cu modulele a, b făcînd între ele unghiul θ. Atunci modulul produsului vectorial al celor doi vectori notat $\vec{a} \times \vec{b}$ este dat de relația

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \equiv a \cdot b \cdot \sin \theta \tag{6}$$

Ținînd seama de definiție este evident că produsul vectorial nu este comutativ ca cel scalar, ci satisface relația

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \tag{7}$$

De asemenea se poate lesne arăta că vom avea satisfăcute următoarele egalităţi:

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{k} = 0 & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Considerînd descompunerea vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ după un sistem de coordonate carteziene [v. relaţiile (4)] şi utilizînd relaţiile (7) şi (8) rezultă

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) \quad (9)$$

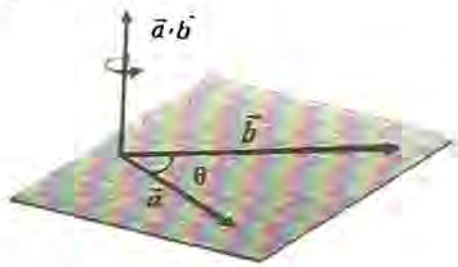


Fig. 3. Produsul vectorial a doi vectori

Se observă că relaţia (9) poate fi scrisă sub formă de determinant după cum urmează

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (10)$$

1.4 Produsul mixt vectorial

Produsul mixt vectorial este produsul scalar între un vector şi vectorul rezultat din produsul vectorial al altor doi vectori. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trei vectori, atunci produsul mixt este numărul dat de relaţia $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Ţinînd seama de expresia produsului vectorial rezultă

$$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{i}(b_y c_z - b_z c_y) + \vec{j}(b_z c_x - b_x c_z) + \vec{k}(b_x c_y - b_y c_x)$$

iar conform expresiei produsului scalar

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \quad (11)$$

Relaţia (11) se poate scrie de asemenea sub formă de determinant după cum urmează:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (12)$$

1.5. Produsul dublu vectorial

Produsul dublu vectorial este vectorul rezultat din efectuarea produsului vectorial între un vector şi vectorul rezultat din produsul vectorial al altor doi vectori. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trei vectori atunci produsul dublu vectorial este dat de relaţia $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Ținînd seama că

$$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{i}(b_y c_z - b_z c_y) + \vec{j}(b_z c_x - b_x c_z) + \vec{k}(b_x c_y - b_y c_x)$$

iar expresia produsului vectorial fiind dată de relația (10), produsul dublu vectorial se poate scrie

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd determinantul se obține

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = {} & \vec{i}(a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z) + \\ & + \vec{j}(a_z b_y c_z - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x) + \\ & + \vec{k}(a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y) \end{aligned}$$

Grupînd termenii în mod convenabil rezultă

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = {} & \vec{i} b_x (a_y c_y + a_z c_z) + \vec{j} b_y (a_z c_z + a_x c_x) + \vec{k} b_z (a_x c_x + a_y c_y) - \\ & - \vec{i} c_x (a_y b_y + a_z b_z) + \vec{j} c_y (a_z b_z + a_x b_x) + \vec{k} c_z (a_z b_x + a_y b_y) \end{aligned}$$

Efectuăm apoi următoarele substituții conform relației (5)

$$\left.\begin{aligned} a_y c_y + a_z c_z &= \vec{a} \cdot \vec{c} - a_x c_x & a_y b_y + a_z b_z &= \vec{a} \cdot \vec{b} - a_x b_x \\ a_z c_z + a_x c_x &= \vec{a} \cdot \vec{c} - a_y c_y & a_z b_z + a_x b_x &= \vec{a} \cdot \vec{b} - a_y b_y \\ a_x c_x + a_y c_y &= \vec{a} \cdot \vec{c} - a_z c_z & a_x b_x + a_y b_y &= \vec{a} \cdot \vec{b} - a_z b_z \end{aligned}\right\}$$

Atunci rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = {} & (\vec{a} \cdot \vec{c})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) - \vec{i} a_x b_x c_x - \vec{j} a_y b_y c_y - \vec{k} a_z b_z c_z - \\ & - (\vec{a} \cdot \vec{b})(c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) + \vec{i} a_x b_x c_x + \vec{j} a_y b_y c_y + \vec{k} a_z b_z c_z \end{aligned}$$

După efectuarea reducerilor expresia de mai sus se poate scrie

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \qquad (13)$$

Termenii $(\vec{a} \cdot \vec{c})$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ reprezintă produsul scalar al vectorilor $\vec{a}, \vec{c}$ respectiv $\vec{a}, \vec{b}$.

Se observă că relația (13) poate fi scrisă simbolic sub formă de determinant după cum urmează

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) & (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{c} & \vec{b} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

2. Elemente de analiză vectorială

După cum se știe analiza matematică se ocupă de calculul diferențial și integral în special pentru spațiul cu două dimensiuni (plan) în care y este variabilă dependentă (funcția) iar x variabila independentă (argumentul).

Analiza vectorială se ocupă cu calculul diferențial și integral în spațiul cu trei dimensiuni. Într-un spațiu cu trei dimensiuni un punct M este caracterizat fie de coordonatele x_0, y_0, z_0 fie de vectorul de poziție $\vec{r}_0$.

La fel ca în spațiul cu două dimensiuni mulțimii punctelor M, respectiv mulțimii vectorilor de poziție $\vec{r}$, li se poate atașa o altă mulțime $F(\vec{r})$ astfel ca între cele două mulțimi de puncte să existe o corespondență biunivocă. Astfel similar cu cazul spațiului cu două dimensiuni putem construi o funcție $F(\vec{r})$ a cărei variabilă independentă este vectorul de poziție $\vec{r}$.

2.1. Diferențiala

Considerăm pentru vectorul de poziție o variație $\Delta\vec{r}$ căreia îi corespunde pentru funcție o variație ΔF dată de relația

$$\Delta F = F(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - F(\vec{r}) \tag{15}$$

Această relație se mai poate scrie

$$\Delta F = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y,\ z) \tag{16}$$

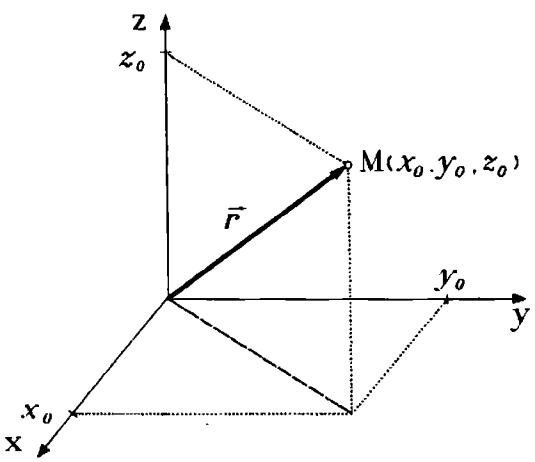


Fig. 4. Caracterizarea unui punct în spațiul cu trei dimensiuni

Scriem din nou această variație după cum urmează

$$\begin{aligned}\Delta F = {} & F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) + \\ & + F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y,\ z + \Delta z) + \\ & + F(x,\ y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y,\ z)\end{aligned} \tag{17}$$

Se poate observa că această expresie este egală cu cea din relația (16). Relația (17) se poate modifica după cum urmează

$$\begin{aligned}\Delta F = {} & \frac{F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)}{\Delta x}\Delta x + \\ & + \frac{F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y,\ z + \Delta z)}{\Delta y}\Delta y + \\ & + \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x,y,z)}{\Delta z}\Delta z\end{aligned} \tag{18}$$

Făcînd în relația (18) ca $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ obținem diferențiala funcției F.

$$\begin{aligned}dF = {} & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)}{\Delta x} \cdot dx + \\ & + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y,\ z + \Delta z)}{\Delta y} dy + \\ & + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(x,\ y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y,\ z)}{\Delta z} dz\end{aligned} \tag{19}$$

Se observă că

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)}{\Delta x}$$

este derivata în raport cu x a funcției $F(x, y, z)$ cînd y și z rămîn constanți. Acest fel de derivată se numește derivată parțială și se notează $\frac{\partial F}{\partial x}$. Analog celelalte limite sînt derivatele parțiale ale funcției F în raport cu y și z și se notează respectiv $\frac{\partial F}{\partial y}$ și $\frac{\partial F}{\partial z}$.

Atunci expresia finală a diferențialei este

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \tag{20}$$

De exemplu să considerăm funcția $F(\vec{r}) = r^2$. Dar r^2 este pătratul modulului vectorului de poziție și este egal cu $x^2 + y^2 + z^2$. Deci funcția aleasă se scrie

$$F(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

Atunci pentru exemplul considerat

$$dF = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

Vectorul de poziție $\vec{r}$ este dat de relația

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{21}$$

Atunci

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Definim

$$\text{grad } F \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} \tag{22}$$

unde grad F este gradientul funcției F și după cum se poate observa este un vector.

În continuare notăm

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \equiv \nabla \tag{23}$$

Operatorul ∇ se numește nabla și este operatorul lui Hamilton. După cum se poate observa ∇ este un operator diferențial și în același timp vector ceea ce înseamnă că se va bucura atît de proprietățile diferențialei cît și de proprietățile vectorilor. Atunci relația (22) se mai poate scrie

$$\text{grad } F = \nabla F$$

Se poate observa că dF nu este altceva decît produsul scalar între grad F și $d\vec{r}$ deci

$$dF = \text{grad } F \cdot d\vec{r} = \nabla F \cdot d\vec{r} \tag{24}$$

De exemplu să calculăm gradientul funcției $F(\vec{r}) = r^2$

$$\text{grad } F = \nabla r^2 = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{grad } F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

2.2 Derivata după o direcție dată

Considerăm o direcție în spațiu având versorul λ (fig. 5)

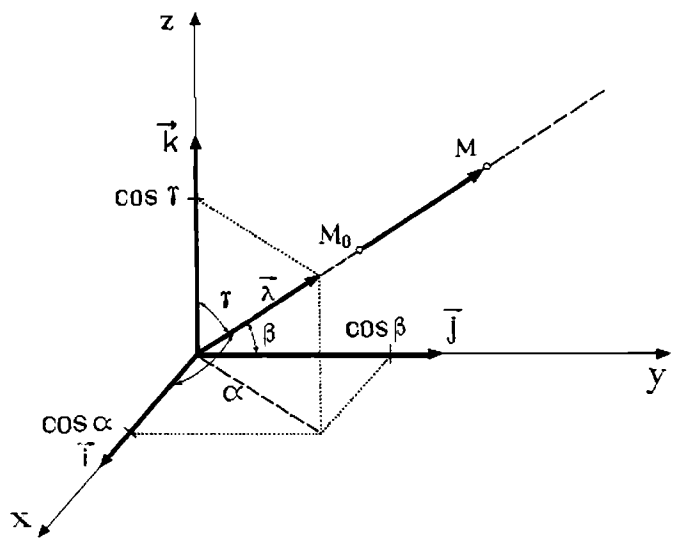


Fig. 5. Derivata după o direcție dată

Se va numi derivata după o direcție dată următoarea expresie:

$$\lim_{M \to M_0} \frac{F(\vec{r}) - F(\vec{r_0})}{\overrightarrow{MM_0}} \quad \text{sau} \quad \lim_{\Delta\vec{\lambda} \to 0} \frac{F(\vec{r}) - F(\vec{r_0})}{\Delta\vec{\lambda}}$$

Conform paragrafului precedent trecînd la diferența finită putem scrie

$$F(\vec{r}) - F(\vec{r_0}) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z + \varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

unde $\varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ este o cantitate care tinde la zero cînd $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$.

Atunci

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\vec{\lambda} \to 0} \frac{F(\vec{r}) - F(\vec{r_0})}{\Delta\lambda} = \frac{\partial F}{\partial x} \lim_{\Delta\vec{\lambda} \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y} \lim_{\Delta\vec{\lambda} \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta\lambda} + \frac{\partial F}{\partial z} \lim_{\Delta\vec{\lambda} \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta\lambda} \qquad (25)$$

Dar cele trei limite reprezintă proiecțiile versorului $\vec{\lambda}$ pe cele trei axe de coordonate adică $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ în care α, β, γ sînt unghiurile făcute de versorul $\vec{\lambda}$ cu axele. Aceste cosinusuri se numesc cosini directori.

Expresia (25) devine

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma \tag{26}$$

dar: $\vec{\lambda} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$

Conform expresiei (24) derivata după o direcție dată a unei funcții este produsul scalar între gradientul funcției și versorul direcției. Deci

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \vec{\lambda} \cdot \text{grad } F = (\vec{\lambda}\nabla) F \tag{27}$$

Unde $(\vec{\lambda}\nabla)$ este produsul scalar între versorul direcției date și nabla, și se numește operatorul derivatei după o direcție dată.

După cum în plan o curbă oarecare este dată de expresia $y = f(x)$ sau $F(x, y) = ct$, în spațiu ecuația unei suprafețe va fi dată de expresia $F(x, y, z) = ct$ sau $F(\vec{r}) = ct$.

Să efectuăm derivata după o direcție tangentă la suprafață $(\overrightarrow{MT})$. Atunci

$$\frac{\partial F}{\partial(\overrightarrow{MT})} = 0 \text{ deoarece } F(\vec{r}) = ct$$

Dar conform relației (27) rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial(\overrightarrow{MT})} = \overrightarrow{MT} \cdot \text{grad } F = 0$$

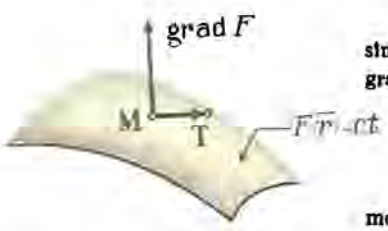


Fig. 6. Derivata după o direcție tangentă la suprafață

Aceasta înseamnă că produsul scalar între $\overrightarrow{MT}$ și grad F este nul, adică cei doi vectori sînt perpendiculari. Astfel rezultă o proprietate importantă care arată că întotdeauna vectorul gradient este normal la suprafața reprezentată de funcția al cărui gradient se calculează (fig.6).

2.3. Cîmpuri vectoriale

Pînă acum ne-am ocupat de cîmpurile rezultate prin corespondența biunivocă între mărimea scalară $F(\vec{r})$ și vectorul de poziție $\vec{r}$. Astfel de cîmpuri se numesc cîmpuri scalare. În spațiul cu trei dimensiuni se poate construi o corespondență biunivocă între o mărime vectorială $\vec{E}(\vec{r})$ și vectorul de poziție $\vec{r}$. Această corespondență biunivocă va defini în acest caz un cîmp vectorial.

2.4. Integrale în spațiul cu trei dimensiuni:

În spațiul cu trei dimensiuni există mai multe elemente diferențiale în raport cu care se poate efectua o integrală. Primul element diferențial este elementul de lungime

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Cu ajutorul acestui element diferențial se poate construi integrala

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{28}$$

Dar vectorul $\vec{E}(\vec{r})$ se poate descompune după cele trei axe de coordonate după cum urmează

$$\vec{E}(\vec{r}) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \tag{29}$$

Atunci integrala pe curba C devine

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{30}$$

Acest tip de integrală se numeşte integrală curbilinie. În cazul cînd curba C este închisă integrala se numeşte circulaţie şi se notează

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{31}$$

Alt element diferenţial este elementul de arie. Orice suprafaţă în spaţiu are în fiecare punct o normală avînd versorul $\vec{n}$. Notînd elementul de arie cu dA putem construi integrala

$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \cdot dA \tag{32}$$

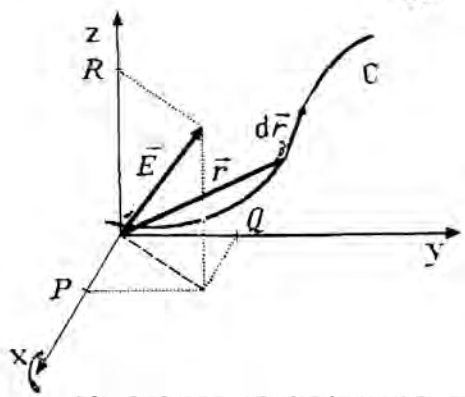


Fig. 7. Pentru calculul integralei curbilinii

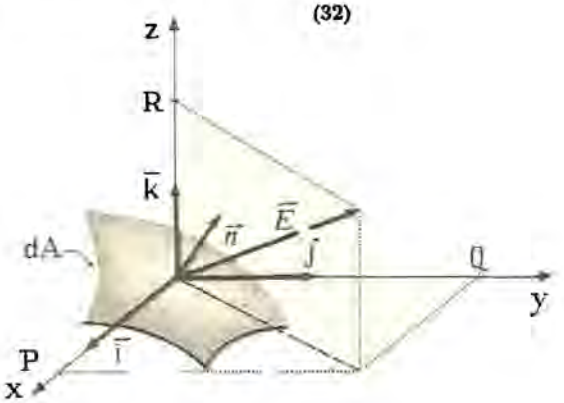


Fig. 8. Pentru calculul integralei de suprafaţă

Această integrală se numeşte fluxul vectorului $\vec{E}(\vec{r})$ prin suprafaţa S. Integrala de mai sus se mai poate scrie

$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \tag{33}$$

unde $d\vec{A} = \vec{n}\,.\,dA$ este elementul diferenţial de arie orientată. Pentru a descompune pe axele de coordonate elementul diferenţial $d\vec{A}$ se poate observa că:

— pe direcţia Oz elementul de arie este $dy \cdot dz$ avînd ca normală versorul $\vec{i}$

— pe direcţia Oy elementul de arie este $dx \cdot dz$ avînd ca normală versorul $\vec{j}$

— pe direcţia Oz elementul de arie este $dx \cdot dy$ avînd ca normală versorul $\vec{k}$

Atunci

$$d\vec{A} = dy \cdot dz \cdot \vec{i} + dz \cdot dx \cdot \vec{j} + dx \cdot dy \cdot \vec{k}$$

Considerînd descompunerea vectorului $\vec{E}(\vec{r})$ din relaţia (29) integrala (33) devine

$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iint_S P\,dy\,dx + Q\,dx\,dx + R\,dx\,dy \tag{34}$$

În cazul cînd integrala se face pe o suprafaţă închisă se utilizează notaţia

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r})\,d\,\vec{A} \tag{35}$$

Ultimul element diferențial din spațiu este elementul de volum notat dv care este un scalar și cu ajutorul căruia putem construi integrala

$$\iiint_V \vec{E(r)}\ dv \tag{36}$$

Integrala de mai sus se numește integrală de volum și considerînd că dv = dx dy dz se mai poate scrie

$$\iiint_V \vec{F(r)}\ dv = \iiint_V F(x,\ y,\ z)\ dx\ dy\ dz \tag{37}$$

2.5. Derivate spațiale

În analiza vectorială există după cum am arătat două tipuri de integrale pe domeniu închis. Acestea sînt fluxul unui vector printr-o suprafață închisă definit de relația (35) și circulația unui vector pe o curbă închisă definită de relația (31). Cu ajutorul acestor integrale se pot construi două tipuri de derivate spațiale.

Primul tip de derivată spațială se definește prin următoarea expresie

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\Delta v}$$

unde S este o suprafață închisă conținînd volumul Δv. Observăm că atunci cînd volumul închis de suprafață tinde la un punct, pentru ca derivata spațială să nu fie nulă, este necesar ca în punctul respectiv să existe un cîmp vectorial. Cu ajutorul acestei derivate spațiale se va introduce în cele ce urmează divergența.

Al doilea tip de derivată spațială se definește prin următoarea expresie

$$\lim_{\Delta A\ 0} \frac{\oint_C \vec{E}\ d\vec{r}}{\Delta A}$$

Unde C este o curbă închisă mărginind aria ΔA. Analog cu cazul precedent, cînd $\Delta A \to 0$ curba închisă tinde la un punct și pentru ca derivata spațială să nu fie nulă este necesar ca în punctul respectiv să avem o circulație. Cu ajutorul acestui tip de derivată spațială se va introduce în cele ce urmează rotorul.

2.6. Divergența

Definim

$$\text{div}\ \vec{E(r)} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oiint_S \vec{E(r)} \cdot d\vec{A}}{\Delta v} \tag{38}$$

unde: div $\vec{E(r)}$ este divergența vectorului $\vec{E(r)}$

$\oiint_S \vec{E(r)} \cdot d\vec{A}$ este fluxul vectorului $\vec{E(r)}$ prin suprafața S.

Δv este volumul mărginit de suprafața S

În continuare vom determina expresia divergenței. Considerăm suprafața închisă *S*, de formă paralelipipedică avînd laturile cu lungimea Δx, Δy, Δz (figura 9). Considerăm că în

interiorul suprafeței S există un cimp vectorial $\vec{E}(\vec{r})$, a cărei valoare în centrul paralelipipedului este $\vec{E}(x, y, z)$.

Calculăm fluxul prin suprafața închisă însumînd algebric fluxurile prin cele șase suprafețe laterale ale paralelipipedului. Atunci

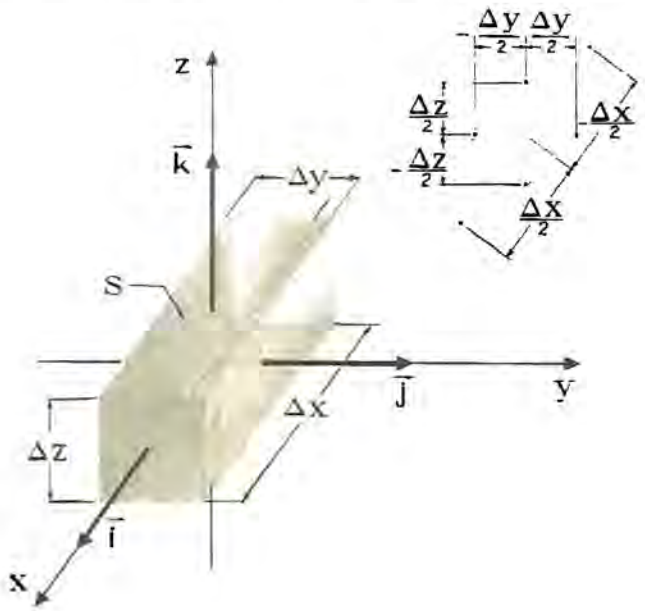


Fig. 9. Pentru calculul divergenței unui vector. Distanțele suprafețelor laterale ale paralelipipedului de origină sînt notate în dreapta sus

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r})d\vec{A} = \vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)\vec{i}\Delta y\Delta z - \vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2}y,\ z\right)\vec{i}\Delta y\Delta z +$$

$$+\vec{E}\left(x, y+\frac{\Delta y}{2},\ z\right)\vec{j}\Delta x\Delta z - \vec{E}\left(x, y-\frac{\Delta y}{2},\ z\right)\vec{j}\Delta x\Delta z +$$

$$+\vec{E}\left(x,\ y,\ z+\frac{\Delta z}{2}\right)\vec{k}\Delta x\Delta y - \vec{E}\left(x,\ y,\ z-\frac{\Delta z}{2}\right)\vec{k}\Delta x\Delta y \qquad (39)$$

Această expresie se mai poate scrie

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r})d\vec{A} = \frac{\vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)-\vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)}{\Delta x}\vec{i}\Delta x\Delta y\Delta z +$$

$$+\frac{\vec{E}\left(x,\ y+\frac{\Delta y}{2},z\right)-\vec{E}\left(x, y-\frac{\Delta y}{2},\ z\right)}{\Delta y}\vec{j}\Delta x\Delta y\Delta z +$$

$$+\frac{\vec{E}\left(x,\ y,\ z+\frac{\Delta z}{2}\right)-\vec{E}\left(x,\ y,\ z-\frac{\Delta z}{2}\right)}{z}\vec{k}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (40)$$

Știind că $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta v$ rezultă

$$\frac{\oiint_S \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A}}{\Delta v} = \vec{i}\,\frac{\vec{E}\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - \vec{E}\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} +$$

$$+\vec{j}\,\frac{\vec{E}\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z\right) - \vec{E}\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} +$$

$$+\vec{k}\,\frac{\vec{E}\left(x, y, z+\frac{\Delta z}{2}\right) - \vec{E}\left(x, y, z-\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \tag{41}$$

Trecînd la limită pentru $\Delta v \to 0$ respectiv $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ observăm că limitele din membrul drept sînt derivatele parțiale ale vectorului $\vec{E}$ în raport cu x, y, z. Atunci relația (41) devine

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{i}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \tag{42}$$

Știind că $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ rezultă

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{43}$$

Observăm că $\operatorname{div} \vec{E}$ poate fi scrisă ca produsul scalar între operatorul nabla și vectorul E. Atunci

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} \tag{44}$$

2.7. Rotorul

În continuare ne vom ocupa de definirea rotorului ca derivată spațială. Considerăm figura 10 reprezentînd un cilindru avînd suprafețele bazelor ΔS care sînt mărginite de curba C. Circulația vectorului E pe curba C va fi $\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

Formăm următoarea egalitate:

$$h \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Sigma_e} \vec{E} \cdot h \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{45}$$

unde h este înălțimea cilindrului iar Σ_e suprafața laterală a cilindrului al cărui element diferențial este $\mathrm{d}\vec{A} = h \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Dar $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{t}.\,\mathrm{d}s$ unde ds este elementul diferențial de arc de curbă iar $\vec{t}$ versorul tangentei la curbă.

Atunci: $\mathrm{d}\vec{A} = h \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{t}(h \cdot \mathrm{d}s) = \vec{t}\,\mathrm{d}A$

Avînd acestea în considerație relația (45) devine

$$h \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Sigma_e} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot \mathrm{d}A \tag{46}$$

Integrala pe toată suprafața Σ a cilindrului va fi

$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot \mathrm{d}A = \iint_{\Sigma_e} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot \mathrm{d}A + \iint_{\Delta S} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot \mathrm{d}A - \iint_{\Delta S} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot \mathrm{d}A$$

Se observă că fluxurile pe suprafeţele ΔS ale bazelor cilindrului se anulează şi atunci relaţia (46) devine

$$h \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{l} \cdot dA \tag{47}$$

Dar $\vec{l} = \vec{u} \times \vec{n}$ unde $\vec{u}$ este versorul normalei la suprafaţa închisă de curba C iar $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafaţa laterală. Atunci

$$h \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{u} \times \vec{n})\, dA$$

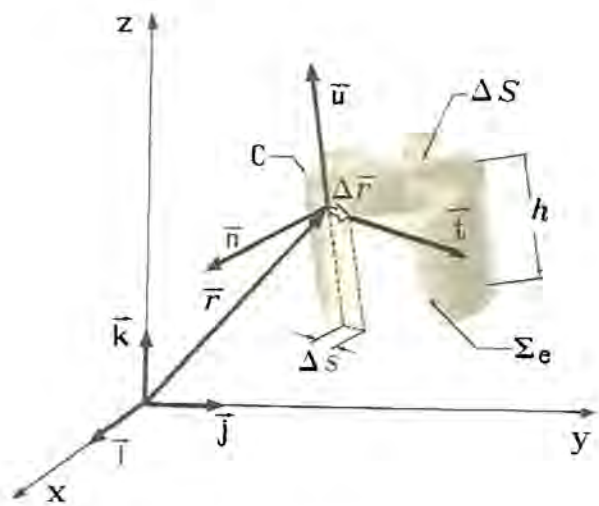


Fig. 10. Pentru calculul rotorului unui vector

Dar $\vec{E}(\vec{u} \times \vec{n})$ fiind produs mixt vectorial care este reprezentat printr-un determinant, relaţia (12), permutările între liniile determinantului, respectiv poziţia vectorilor în produsul mixt vectorial, nu schimbă valoarea şi $\vec{n} \cdot dA = d\vec{A}$.

Atunci

$$h \oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \vec{n}(\vec{E} \times \vec{u})\, dA = \iint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A} \tag{48}$$

deoarece $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafaţa laterală a cilindrului.

În continuare vom construi următoarea limită

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{h \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\Delta v} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{h \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{h \Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\Delta S} \tag{49}$$

Totodată conform relaţiei (48)

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{h \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\iint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{u})\, d\vec{A}}{\Delta v} = \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{u}) \tag{50}$$

deci:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\Delta S} = \text{div}\,(\vec{E} \times \vec{u}) = \nabla(\vec{E} \times \vec{u}) \tag{51}$$

Să calculăm divergența vectorului $(\vec{E} \times \vec{u})$. Am arătat anterior că operatorul nabla este un operator diferențial și vector. Ca operator diferențial trebuie să acționeze pe rînd asupra factorilor produsului ca în cazul diferențialei din analiza matematică unde

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

Fiind un vector iar div $(\vec{E} \times \vec{u})$ fiind produs mixt vectorial, putem să facem ca nabla să acționeze asupra fiecăruia din factorii produsului prin permutări

$$\nabla(\vec{E} \times \vec{u}) = \vec{u}(\nabla \times \vec{E}) + \vec{E}(\vec{u} \times \nabla)$$
$$\nabla(\vec{E} \times \vec{u}) = \vec{u}(\nabla \times \vec{E}) - \vec{E}(\nabla \times \vec{u}) \tag{52}$$

Termenul al doilea al membrului drept și-a schimbat semnul deoarece am schimbat între ele două linii ale determinantului care reprezintă produsul mixt, pentru a face ca nabla să acționeze asupra lui $\vec{u}$. Dar datorită faptului că $\vec{u}$ fiind versor este o constantă, operatorul nabla fiind diferențial rezultă că $\nabla \times \vec{u} = 0$. Atunci:

$$\nabla(\vec{E} \times \vec{u}) = \vec{u}(\nabla \times \vec{E}) \tag{53}$$

În conformitate cu relațiile (51) și (53) rezultă

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\Delta S} = \vec{u}(\nabla \times \vec{E}) \tag{54}$$

Definim rotorul vectorului $\vec{E}$ ca produsul vectorial între operatorul nabla și vectorul $\vec{E}$

$$\text{rot}\,\vec{E} = \nabla \times \vec{E} \tag{55}$$

Conform dezvoltării produsului vectorial din relația (10) rezultă

$$\text{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{56}$$

Prin urmare după cum rezultă din relația (54) și (55) derivata spațială a circulației vectorului $\vec{E}$ este egală cu proiecția rotorului vectorului $\vec{E}$ pe normala la suprafața închisă de curba C.

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\Delta S} = \vec{u}\ \text{rot}\ \vec{E} \tag{57}$$

Din cele prezentate pînă acum se poate observa că gradientul și rotorul unui vector sînt vectori iar divergența unui vector este un scalar.

2.8. Formula Green — Ostrogradski

Considerăm o suprafață închisă care mărginește un volum V. Considerăm acest volum împărțit în celule Δv_k infinit mici avînd suprafețele laterale Σ_k.

În conformitate cu relația (38) trecînd la diferențe finite pentru fiecare celulă se poate scrie

$$\oiint_{\Sigma_k} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{A} = \Delta v_k \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon(\Delta v_k)$$

Unde $\varepsilon(\Delta v_k)$ se anulează cînd Δv_k tinde la zero. Însumînd pe toate suprafețele Σ_k și observînd că fluxurile pe suprafețele Σ_k care sînt interioare se anulează, prin trecere la limită se obține formula Green-Ostrogradski

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{A} = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r})\, dv \tag{58}$$

Ținînd seama de relațiile (34), (37) și (43) pentru un sistem de axe de coordonate carteziene formula Green-Ostrogradski devine:

$$\oiint_{\Sigma} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \tag{59}$$

unde P, Q, R sînt proiecțiile vectorului $\vec{E}$ pe axele de coordonate.

2.9. Formula lui Stokes

Considerăm o curbă închisă C care mărginește o suprafață S. Considerăm această suprafață împărțită în suprafețe elementare ΔA_k infinit mici avînd conturul lateral C_k.

În conformitate cu relația (57) și trecînd la diferențe finite pentru fiecare suprafață ΔA_k se poate scrie:

$$\oint_{C_k} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} = \vec{u} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \Delta A_k + \varepsilon(\Delta A_k)$$

unde $\varepsilon(\Delta A_k)$ se anulează cînd ΔA_k tinde la zero.

Însumînd pe toate contururile C_k și observînd că circulațiile pe contururile C_k care sînt interioare curbei C se anulează, prin trecere la limită se obține formula lui Stokes:

$$\oint_{C} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{u} \cdot dA \tag{60}$$

Dar anterior s-a arătat că $\vec{u}$ este normala la suprafața închisă de curba C.

Atunci formula lui Stokes se mai poate scrie

$$\oint_{C} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{A} \tag{61}$$

Adică circulația vectorului $\vec{E}$ pe curba C este egală cu fluxul rotorului vectorului $\vec{E}$ prin suprafața S închisă de curba C.

Conform relațiilor (31), (34) și (56) într-un sistem de axe de coordonate carteziene formula lui Stokes devine

$$\int_{C} P dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{62}$$

unde P, Q, R sînt proiecţiile vectorului $\vec{E}(\vec{r})$ pe axele de coordonate.

În cazul cînd curba C este o curbă plană iar vectorul $\vec{E}(\vec{r})$ se găseşte în planul curbei avînd proiecţiile pe cele două axe de coordonate ale planului P şi Q relaţia (62) devine

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{63}$$

2.10. Gradientul ca derivată spaţială

În paragrafele 2.1 şi 2.2 am introdus gradientul din necesitatea simplificării exprimării diferenţialei şi a derivatei după o direcţie dată.

Pentru a avea o concepţie unitară asupra derivatelor spaţiale în cele ce urmează vom arăta că şi gradientul este o derivată spaţială.

Considerăm un vector $\vec{U}$ constant şi construim următoarea integrală

$$\oiint_S \vec{U}\,F\,d\vec{A}$$

în care F este o funcţie scalară.

Utilizînd formula Green — Ostrogradski putem scrie

$$\oiint_S \vec{U}\cdot F\cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div}\,(\vec{U}\cdot F)\,dv \tag{64}$$

Să calculăm div $(\vec{U}\cdot F)$

$$\text{div}\,(\vec{U}\cdot F) = \nabla(\vec{U}\cdot F) = \vec{U}\nabla F + F\nabla\vec{U}$$

$$\text{div}\,(\vec{U}\cdot F) = \vec{U}\cdot\text{grad}\,F + F\ \text{div}\,\vec{U} \tag{65}$$

Datorită faptului că $\vec{U}$ este un vector constant avem $\nabla\vec{U} = 0$ şi deci

$$\text{div}\,(\vec{U}\cdot F) = \vec{U}\ \text{grad}\ F \tag{66}$$

Înlocuind relaţia (66) în relaţia (64) rezultă

$$\vec{U}\oiint_S F\cdot dA = \vec{U}\iiint_V \text{grad}\ F\cdot dv \tag{67}$$

Simplificînd cu $\vec{U}$ relaţia (67) rezultă

$$\oiint_S F\cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{grad}\ F\ dv \tag{68}$$

Din relaţia (68) făcînd volumul V să tindă la zero rezultă

$$\text{grad}\ F = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oiint_S F\cdot d\vec{A}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v\to 0}\vec{n}\,\frac{\oiint_S F\cdot dA}{\Delta v} \tag{69}$$

Din relaţia (69) se vede că gradientul este o derivată spaţială şi este reprezentat printr-un vector colinear cu normala la suprafaţă.

2.11. Cîteva aplicații utile ale calculului cu nabla

a) Ne propunem să calculăm rot rot $\vec{E}$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \tag{70}$$

Utilizînd formula produsului dublu vectorial din relația (13) rezultă

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla\vec{E}) - (\nabla\nabla)\vec{E} \tag{71}$$

Produsul $(\nabla\nabla)$ se notează cu Δ și este operatorul lui Laplace.

Utilizînd expresia lui ∇ din relația (23) și observînd că $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ adică pătratul modulului lui nabla rezultă

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

De exemplu

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \tag{72}$$

adică suma derivatelor parțiale de ordinul doi ale funcției F.

În mod analog pentru un vector avem

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \tag{73}$$

Atunci relația (71) se poate scrie

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta\vec{E} \tag{74}$$

b) Vom calcula acum div rot $\vec{E}$

Se observă că în membrul doi avem un produs mixt vectorial care va fi exprimat printr-un determinant avînd două linii identice.

În teoria determinanților se arată că un astfel de determinant este nul. Atunci

$$\text{div} \cdot \text{rot } \vec{E} = 0 \tag{75}$$

c) În sfîrșit să calculăm rot grad F

$$\text{rot grad } F = \nabla \times \nabla F \tag{76}$$

Se observă că avem de-a face cu un produs vectorial a doi vectori colineari care conform relației (6) trebuie să fie nul. Prin urmare:

$$\text{rot grad } F = 0 \tag{77}$$

LISTA

unor tabele și figuri cu valori numerice necesare la rezolvarea aplicațiilor numerice și a problemelor

Tabelul 1. 1	Lungimi foarte mari și foarte mici în natură	9
Tabelul 1. 2	Vîrsta și durata medie a unor fenomene naturale	10
Tabelul 4. 1	Valorile factorului lui Lorentz $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$	58
Tabelul 4. 2	Durata cinematică și durata statică pentru cîteva călătorii cosmice	65
Tabelul 6. 1	Exprimarea forței active și a forței rezultante în cîteva tipuri de mișcări în care intervin mai multe forțe fundamentale și nefundamentale	100
Tabelul 8. 1	Masa, raza medie, densitatea medie, cîmpul gravitațional și constanta Γ pentru cîțiva aștri din sistemul solar	126
Tabelul 8. 2	Energia cinetică, energia potențială și energia de lansare, raportate la masă, pentru un corp pe orbita de altitudine h în jurul Pămîntului	135
Tabelul 8. 3	Vitezele de evadare de la suprafața cîtorva aștri din sistemul solar	138
Tabelul 8. 4	Caracteristicile treptelor rachetei Saturn V B	141
Tabelul 8. 5	Caracteristicile motoarelor rachetei Saturn V B	141
Tabelul 8. 6	Energia cinetică, energia potențială și energia de lansare, raportate la masă, pentru diferite altitudini în cazul Lunii	143
Tabelul 9. 1	Energiile de legătură și variațiile de masă echivalente pentru trei configurații ale substanței	158
Tabelul 9. 2	Cantitatea de propulsant minimă necesară obținerii vitezelor din tabelul 4.2, pentru un corp cu masa $m = 10^5$ kg	169
Figura 2. 9	Valorile unor temperaturi foarte mari și foarte mici, caracteristice unor fenomene naturale	30
Figura 5. 9	Dependența raportului dintre viteza rachetei și viteza gazelor de raportul dintre masa finală și masa inițială a rachetei	77
Figura 5.12	Dependența raportului m/m_0 de raportul v/c	84
Figura 6. 4	Expresiile legii forței pentru șase sisteme de corpuri în mișcare pe plan orizontal, atîrnate și pe plan vertical	91
Figura 8. 8	Valorile vitezei pe orbita circulară și a vitezei de evadare de la anumite distanțe de centrul Pămîntului	138

Indice alfabetic

(cifrele indică paragraful)

Accelerația
  ca invariant 3.7
  centripetă 2.2, 3.5, 5.3
    absolută 3.5
    de transport 3.5, 6.5
    relativă 3.5, 6.5
  complementară 3.5, 6.5
  de transport 3.2
  gravitațională 6.5, 8.2
  liniară 2.2
  unghiulară 2.2, 6.5, 7.3
Adiabată 11.5
Amortizare 13.1
Amplitudinea
    oscilației 2.5
    rezultantă 13.4
Analiza Fourier 13.3
Anihilarea
    substanței cu antisubstanța 9.5, 9.7
Apăsarea
    normală 6.1, 6.3
Astronautica 4.7, 8.6, 8.7, 8.8
Atmosfera
    planetelor 10.7
Atomism 1.1

Bătăi 13.4

Căldura
  de ardere 9.2
Centru
  de masă 7.2, 7.3
Ciclul Carnot
  direct 12.1
  inversat 12.2
Cifră
  semnificativă 1.5, 1.6
Circulația
  cîmpului 15.2
    electric 14.2
    magnetic 14.5
Ciocnirea
  centrică 5.2
  dreaptă 5.3
  elastică 5.1, 9.5
  necentrică 5.2
  neelastică 5.1, 9.5
  oblică 5.3
  plastică 5.1, 9.5, 9.6

Cîmpul
  electric în vid 14.2
  electromagnetic 15.3, 15.4
  gravitațional 8.2
  magnetic în vid 14.5
Coeficientul
  de creștere a presiunii 10.1
  de dilatare (la gaze) 10.1
  de frecare la alunecare 6.1
  de putere
    al frigoriferului 12.6
    al pompei de căldură 12.6
Coerența 13.5
Combinații
  endoterme 9.2
  exoterme 9.2
Compunerea
  oscilațiilor 13.2,13.5
  undelor 13.5
Comprimarea
  gazului 11.3, 11.4, 11.5
Condiții
  de echilibru 7.3
Configurațiile
  substanței 9.2, 9.4
Conservarea
  energiei 9.5
  masei 9.5
Constanta
  Avogadro 2.7, 10.1
  Boltzmann 10.1
  cercului (π) 1.4
  gazului perfect 10.1
  gravitațională 8.1
  luminii (c) 4.2
  solară 9.4
Constanța
  vitezei luminii 4.2
Contracția
  spațiului 4.4
Convenție de semn
  la compunerea vitezelor 3.3, 3.6
  pentru fluxul electric 14.2
  în termodinamică 11.1
Cuplul
  asupra magnetului 14.6
Curentul
  de deplasare 14.5

Deplasarea
  în mediu în mișcare 3.3
  relativă 3.3

Destinderea
gazului 11.3, 11.4, 11.5
Dilatarea
timpului 4.5
Distribuţia
Maxwell 10.6, 10.7
moleculelor în atmosferă 10.4
vitezelor moleculare
pe o direcţie 10.6
pe 3 direcţii 10.6
Divergenţa
cîmpului 15.1
Diviziunile
fizicii 1.3
Durata
cinematică 4.5
statică 4.5

Echilibrul
corpului solid 7.3
dinamic 8.1, 8.5
mecanic 7.3
stabil la energie potenţială minimă 9.4, 9.2
statistic 10.5
termic 2.4
Echivalenţa
masă-energie 9.4
Ecliptica 3.4
Ecuatorial 3.4
Ecuaţia
mişcării 3.2, 3.7, 6.1
de propagare 13.4
de stare 11.3
Ecuaţiile
locale (v. ... Maxwell)
Maxwell 15.3, 15.4
Efectul
Doppler 13.6
Eliberarea
energiei solare 9.4
Energetica 9.7
Energia
cinetică 6.6, 7.5, 8.5, 9.1, 9.4, 9.5
moleculară 10.3
de ardere 9.2
de evadare 8.6
de formare 9.2
de lansare 8.5
de legătură 9.2, 9.4, 9.5, 9.7
de mişcare 9.4
de reacţie 9.2
de repaus 9.4
elastică 9.4
electromagnetică 15.6
internă 9.6, 10.2
oscilatorului armonic 13.1
potenţială 8.4, 8.5, 9.1, 9.2, 9.4, 9.5
termică 9.6
totală 9.4, 9.5
pe orbita gravitaţională 8.5
undei 13.4

Entropia 12.7
Eroare 1.5
relativă 1.5, 1.6
Expansiunea
Universului 13.6
Experimente fundamentale:
Ciocnirea bilelor aruncate de pe 2 platforme 5.7
Ciocnirea elastică 5.1
Ciocnirea plastică 5.1
Destinderea reală a gazului perfect 11.6
Electrice şi magnetice 14.1
Inerţia în sistem neinerţial 6,4
Joule 11.2
Michelson şi Morley 4.1
Procesul ciclic monoterm 11.7
Propagarea undelor luminoase 4.2
Propagarea undelor mecanice 4.2

Factorul
Lorenz 3.3, 4.3, 5.7, tabel 4.1
Faza
iniţială 13.2
undei 13.4
Fazor 13.4
Fluxul
cîmpului 15.1
electric total 14.2
magnetic total 14.5
Formula
Coulomb 14.3
Formulele
transformare Galilei (v. Transformările...)
Forţa 2.2., 5.3
activă 6.6
aerodinamică 6.1.
arhimedică 6.1.
centripetă 5.3
conservativă 6.7, 8.4, 9.1
Coriolis (v. ... de inerţie Coriolis)
de cîmp 5.3, 6.1, 9.1
de frecare 6.1, 9.6
de inerţie 6.4, 6.5
centrifugă 6.5
Coriolis 6.5
de legătură (v. Reacţiunea legăturii)
de revenire 13.1
elastică 5.3, 9.1
electrică 6.1, 9.2, 14.6
electromagnetică (v. ... Laplace)
exterioară 7.2
fundamentală 6.1, 6.6
gravitaţională 5.3, 6.1, 8.1, 8.2
ca forţă conservativă 6.7, 8.4
imprimată 5.3, 6.1, 6.6, 9.1
interioară 7.1
Laplace 14.6
moleculară 6.1, 9.2
nucleară 6.1. 9.2
rezultantă 6.3, 6.6
componenta liberă 6.3, 6.6
vîntului 5.4, 6.1, 6.2

Frecarea
ca interacțiune 5.3
Frecvența
de rotație 3.5
Frigorifer
principiu 12.2, 12.3, 12.6
Funcția
de distribuție Maxwell 10.6

Grad
de libertate 7.1, 10.3
Gradientul
energiei electrice 14.4
energiei potențiale 8.4
potențialului electric 14.4
Greutatea 6.6
Grup
de unde 15.5

Impuls 2.2, 5.2
liniar 5.6
unghiular 5.6
Incinta
adiabatică 11.1
Inerția (v. Legea inerției,
Forța de inerție,
Sistem inerțial)
Instrument
matematic 1.2
Integrala
Fourier 13.3
Intensitatea
undei 13.4, 13.5
Interacțiune 5.2, 9.5, 11.1
cauza forței 5.3
Interferența 13.5
Invarianța
vitezei luminii 4.2, 4.3, 4.7
Izotermă 11.4

Kilomol 2.7

Legătură 6.2, 7.1
Legea
acțiunii și reacțiunii (v. Teorema...)
Ampère 14.5, 15.3
Beer 6.5
Boltzmann 10.5
conservării
energiei 9.5
impulsului 5.2
momentului impulsului 5.6, 7.5
Coulomb (v. Teorema...)
definiție 1.4
doua a termodinamicii 12.4
Faraday 14.2, 15.3
forței
mișcare rectilinie 5.3
mișcare circulară 5.6
mișcare rotație 7.5
în cîmpul electric 14.2
electromagnetice (v. ... Laplace)
sistem de corpuri 6.3
Gauss
cîmp electric 14.2, 15.3
cîmp magnetic 14.5, 15.3
gazului perfect 10.1
inerției
mișcare rectilinie 5.3
mișcare circulară 5.6
sistem de particule 7.2
mișcare rotație 7.5
întîi a termodinamicii
proces adiabatic 11.2
generală 11.6
Laplace 14.6
Newton 8.1
Legile dinamicii
mișcare rectilinie 5.1
mișcare circulară 5.6
Newton 5.1.
Lucrul
consumat 6.6
efectiv 6.6
efectuat de sistem 9.5, 11.2, 11.6
forței 6.6, 9.1
gravitaționale 8.4
electrice 14.4
Lungimea
ca invariant 3.7
cinematică 3.7, 4.4
relativă (v. Relativitatea spațiului)
statică 3.7, 4.4

Masa
atomică 2.7
atomului 2.7
cinematică 5.7
de mișcare 5.7
de repaus 5.7
kilomolului 2.7
moleculară 2.7
moleculei 2.7
relativă (v. Relativitatea masei)
statică 5.7
Mașina
termică 11.7, 12.3, 12.4, 12.5
ideală 12.1
reală 12.1
Mărime
derivată 2.1
fundamentală 2.1
invariantă 3.7
măsurabilă 2.1
reperabilă 2.1.

Măsurarea
  caracteristici 1.5
  masei
    procedeu static 5.7
    procedeu dinamic 5.7
Mişcarea
  browniană 9.6, 10.1
  de precesie 3.4
  de nutaţie 3.4
  diurnă 3.4
  în curbă 5.3, 6.2
  în cîmpul gravitaţional 8.2,
  în cîmpul electric şi magnetic 14.6
  în mediu în mişcare 3.3
  navelor cu pînze 5.4, 6.2
  pe orbita gravitaţională 8.1, 8.5
  pe planul înclinat 6.7
  prin interacţiune cu mediul 5.5
  rectilinie cu frecare 6.1
  relativă 3.1, 4.1
    circulară 3.5, 6.5
    liniară 3.2, 3.3
    în cîmpul gravitaţional 8.3
  supusă la legături 6.3. 7.1
Momentul
  cinetic (v. ... impulsului)
  de inerţie 2.3, 7.4
    variabil în timp 7.4, 7.5
  forţei 2.2
  impulsului 2.2, 5.6, 7.5
  magnetic 14.6

Nod 13.5

Ordin de mărime 1.6
Oscilator 13.1
Oscilaţie
  amortizată 13.1
  armonică 2.5
  forţată 13.1
  întreţinută 13.1
  liberă 13.1
  limitată în timp 13.3

Perioada
  de rotaţie
    absolută 3.5
    de transport 3.5
    relativă 3.5, 3.6
Permeabilitatea vidului 14.2
Permitivitatea vidului 14.2
Perpetuum mobile 9.6
Pompă de căldură 12.6
Posibilitatea călătoriilor cosmice 4.7, 9.7
Potenţial electric 14.4
Putere calorifică 9.7
Precizie 1.5, 1.6
Principiul
  constanţei vitezei luminii 4.2
  definiţie 1.4
  echipartiţiei energiei 10.3
  invarianţei
    galileiene 3.7
    einsteiniene 4.2, 4.3
  paralelogramului 1.7
  relativităţii 4.2
Procedeu
  de măsurare 2.1
  de reperare 2.1
Proces
  adiabatic 11.2, 11.4
  ciclic
    monoterm 11.7
    biterm 12.1
  izoterm 11.4, 11.6
  neperiodic 13.3
  periodic nearmonic 13.3
  reversibil 12.4
Propagarea
  luminii 4.2, 4.3
  oscilaţiilor 13.4
Propulsarea
  rachetei 5.5
  chimică 9.7
  nucleară 9.7
  prin anihilare 9.7

Randament 12.1, 12.5
Reacţiunea
  forţei 5.4, 6.1
  legăturii 6.2
  vîntului 5.4
Relativitatea
  masei 5.7
  simultaneităţii 4.5
  spaţiului 4.7
  timpului 4.7
Rezervor de căldură 11.7
Rezistenţa la înaintare 6.1
Rotorul cîmpului 15.2

Satelitul unui astru 8.5
Schimb de energie 11.1
Schimbare de stare 11.1
    lucru la... 11.3
Semnal 4.1, 13.3, 15.5
  luminos 4.1, 4.2
Sensibilitate 1.5
Seria Fourier 13.3
Sistem
  conservativ 9.3
  centrului de masă 7.6
  de corpuri 6.3
  de legi 1.2
  de particule 7.2

de referinţă 3.1, 3.7
fix 3.1, 4.2
mobil 3.1, 4.2
inerţial 3.7, 4.4
neinerţial 3.7, 6.4
stelelor fixe 3.5, 3.7
izolat 11.2
închis 5.2, 9.5
termodinamic 11.1
Spectru de frecvenţe
continuu 13.3
de linii 13.3
Starea unui sistem 11.1

Temperatura
Celsius 2.4
Kelvin 2.4
Tensiunea în bare sau cabluri 6.3
Teorema
acţiunii şi reacţiunii 5.4
Avogadro 10.1
Boyle-Mariotte 10.1
Carnot 12.5
Charles 10.1
de compunere
viteze 3.2, 3.7, 4.6
viteze unghiulare 3.5, 3.6
frecvenţe de rotaţie 3.5
perioade de rotaţie 3.5
definiţie 1.4
Fourier 13.3
Green-Ostrogradski 15.1
Gay Lussac 10.1
Stokes 15.2
Teoria
cinetică a gazelor 10.1, 10.2
relativităţii 4.1, 4.7
Timpul
absolut 3.2
ca invariant 3.7
de propagare
longitudinal 4.1
transversal 4.1
neinvariant (v. relativitatea timpului)
Tracţiunea motorului 6.1
Traiectoria în cîmpul gravitaţional 8.6
Transformarea
adiabatică 11.1, 11.2, 11.6
căldură-lucru 12.1, 12.4
energiilor 8.5, 9.3, 9.6
lucru-căldură 11.2, 11.7, 12.4
izobară 10.1
izocoră 10.1
izotermă 10.1, 11.4
Transformările
Galilei 3.2, 3.7, 4.3
Lorentz 4.3

Unda
armonică 2.5
electromagnetică 15.4
longitudinală 2.5
transversală 2.5
Unde
coerente 13.5
necoerente 13.5
staţionare 13.5
Unitatea atomică de masă 2.7
Unităţi
derivate 2.1
electrice şi magnetice 14.6
fundamentale 2.1
Universul
caracteristici 1.1
echilibrul în... 8.1
expansiunea... 13.6

Variaţia
impulsului 5.2, 5.3
masei cu viteza 5.7
Vectorul
alunecător 1.7
de undă 13.4
legat 1.7
Poynting 15.6
Ventru 13.5
Viteza
absolută 3.2
cosmică
a doua 8.6
a treia 8.6
prima ... 8.5
de evadare 8.6
de fază 13.4, 15.5
de grup 15.5
de injecţie 8.5
de propagare a energiei 13.4
de transport 3.2, 3.3
limită în univers 4.3, 4.6, 5.7, 15.5
relativă 3.1, 3.3
unghiulară 2.2, 3.6
absolută 3.5
de transport 3.5
relativă 3.5, 3.6
Vîntul solar 9.4

Ziua
siderală 3.4
solară 3.4

Tiparul executat sub comanda
nr. 1877
Intreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89–97
București,
Republica Socialistă România.

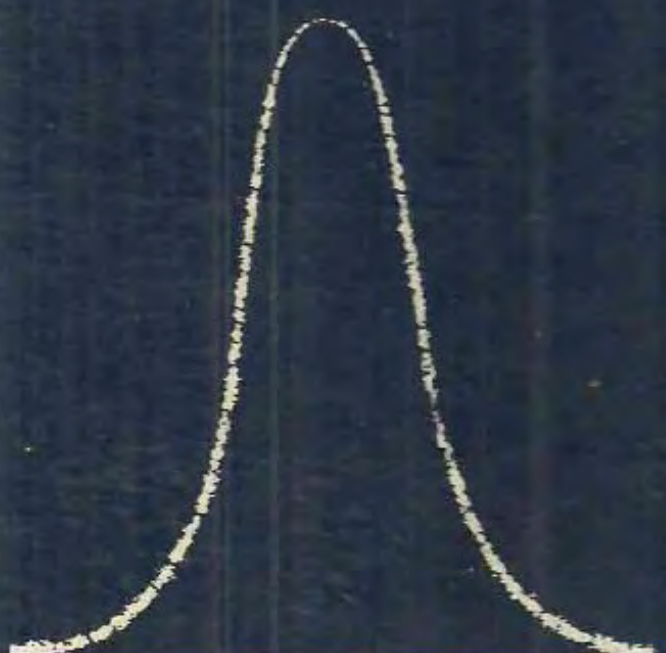
Sistemul internaţional de unităţi

UNITĂŢI DERIVATE RECOMANDATE

Mărimea	Unitatea	Simbolul
UNITĂŢI ALE MĂRIMILOR CARACTERISTICE FENOMENELOR PERIODICE		
Lungime de undă, amplitudine	metru	m
Număr de undă,	unu pe metru	1/m
Perioadă	secundă	s
Frecvenţă de rotaţie, frecvenţă unghiulară, pulsaţie	unu pe secundă	1/s
Frecvenţă de amortizare	unu pe secundă	1/s
Factor de atenuare, factor de fază, factor de propagare	unu pe metru	1/m
UNITĂŢI MECANICE		
Gradientul vitezei	metru pe secundă pe metru	(m/s)/m
Volum specific	metru cub pe kilogram	m^3/kg
Impuls	kilogram-metru pe secundă	kg·m/s
Momentul impulsului	kilogram-metru pătrat pe secundă	$kg \cdot m^2/s$
Moment de inerţie	kilogram-metru pătrat	$kg \cdot m^2$
Greutate specifică (ponderitate)	newton pe metru cub	N/m^3
Momentul forţei, momentul cuplului de forţe	newton-metru	N·m
Impulsul forţei	newton-secundă	N.s
Tensiune superficială	newton pe metru	N/m
Debit de masă	kilogram pe secundă	kg/s
Debit de volum	metru cub pe secundă	m^3/s

Mărimea	Unitatea	Simbolul
UNITĂŢI ELECTROMAGNETICE:		
Densitatea curentului electric	amper pe metru pătrat	A/m^2
Densitatea de volum a sarcinii electrice	coulomb pe metru cub	C/m^3
Densitate de suprafaţă a sarcinii electrice	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Moment electric	coulomb pe metru	C.m
Inducţie electrică (deplasare electrică)	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Fluxul inducţiei electrice (flux electric)	coulomb	C
Permitivitate	farad pe metru	F/m
Polarizaţie electrică	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Permeabilitate	henry pe metru	H/m
Moment magnetic amperian	amper-metru pătrat	$A.m^2$
Magnetizaţie	amper pe metru	A/m
Moment magnetic coulombian	weber-metru	Wb.m
Polarizaţie magnetică	tesla	T
Reluctanţă	amper pe weber	A/Wb
Permeanţă	weber pe amper	Wb/A
	sau henry	sau H
Susceptivitate magnetică	henry pe metru	H/m
Putere electrică activă	watt	W
Putere electrică reactivă	var	var
Putere electrică aparentă	volt-amper	V.A
UNITĂŢI CALORICE:		
Energie internă	joule pe kilogram	J/kg
Capacitate calorică	joule pe kelvin	J/K
Căldură masică	joule pe kilogram-kelvin	J/(kg.K)
Entropie	joule pe kelvin	J/K
Entropie specifică	joule pe kilogram-kelvin	J/(kg.K)
Flux termic	watt	W

S-18.49



EDITURA DIDACTICA SI PEDAGOGICA